

# Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier Volumenelemente

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur- und Vermessungswesen

der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Christof Freischläger

aus Freiburg i. Br.

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 2000

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Schweizerhof

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Ramm

Karlsruhe 2000

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Die lineare EAS-Methode</b>	<b>14</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	15
3.2	EAS-Formulierung für Quader . . . . .	19
3.2.1	Biegeversteifung . . . . .	21
3.2.2	Volumetrische Versteifung . . . . .	22
3.2.3	Unterdrückung der Versteifungseffekte . . . . .	24
3.3	Parallelepipede . . . . .	32
3.4	Hexaeder mit beliebiger Geometrie . . . . .	37
3.5	Eine modifizierte EAS-Formulierung . . . . .	40
3.6	Numerische Beispiele . . . . .	43
3.6.1	Eigenwertanalyse verschiedener Elementformulierungen . . . . .	43
3.6.2	Inkompressibler Block . . . . .	46
3.6.3	3D-Elemente als Plattenelemente . . . . .	48
3.7	Diskussion und Ausblick . . . . .	50
<b>4</b>	<b>EAS-Elemente für nichtlineare Probleme</b>	<b>51</b>
4.1	Einführung . . . . .	51
4.2	Konstruktion des $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators . . . . .	52
4.3	Schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	56
4.4	Linearisierung der nichtlinearen Gleichungen . . . . .	59
<b>5</b>	<b><math>\bar{\mathbf{F}}</math>-Methode</b>	<b>65</b>
5.1	Grundlagen . . . . .	65
5.2	Konvergenzbedingungen . . . . .	66
5.3	Der innere Kraftvektor . . . . .	68
5.3.1	Diskretisierung . . . . .	71
5.4	Die Tangentensteifigkeitsmatrix . . . . .	72
5.4.1	Diskretisierung . . . . .	76
5.5	$\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung nach Moran . . . . .	78

5.5.1	Patch-Test . . . . .	78
5.5.2	Kraftvektor und Steifigkeitsmatrix . . . . .	79
5.6	$\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung nach Nagtegaal . . . . .	81
5.6.1	Patch-Test . . . . .	82
5.6.2	Kraftvektor und Steifigkeitsmatrix . . . . .	82
5.7	Eine Bemerkung zum Elementvolumen . . . . .	85
5.8	Inkonsistente Methode nach de Souza Neto [1996] . . . . .	86
5.9	Vergleich zweier $\bar{\mathbf{F}}$ -Strategien . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Hybrid-Formulierung</b>	<b>91</b>
6.1	Beschreibung der Methode . . . . .	91
6.2	Vergleich: Hybrid- und $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode . . . . .	94
<b>7</b>	<b>Elemente für spezielle Materialgesetze</b>	<b>96</b>
7.1	Verschiebungsmethode . . . . .	97
7.2	Selektiv Reduzierte Integration (SRI) . . . . .	101
7.3	Kombination mit $\bar{\mathbf{F}}$ -Methoden . . . . .	102
7.3.1	$\bar{\mathbf{F}}$ -Methode nach Moran . . . . .	104
7.4	Hybrid-Formulierung . . . . .	105
7.5	Die Methode von Crisfield . . . . .	107
7.6	Eine Variante der Crisfield-Methode . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Stabilitätsuntersuchung</b>	<b>111</b>
8.1	Instabilität des Q1P0-Elements . . . . .	112
8.2	Instabilität der SRI-Formulierung . . . . .	116
8.3	Eine Stabilisierungsmethode . . . . .	116
8.3.1	Numerische Stabilitätsuntersuchung . . . . .	118
8.4	Simulation: Kompression eines Würfels . . . . .	120
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>124</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>126</b>
	<b>Liste der Bezeichnungen</b>	<b>130</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die folgende Einführung in einen wichtigen Teilbereich der aktuellen Forschung über die Finite Elemente Methode (FEM) befaßt sich mit der Formulierung versteifungsfreier, robuster, dreidimensionaler 8-Knoten Volumenelemente. Dabei werden die Motivation und die Ziele der vorliegenden Arbeit dargestellt und es wird eine kurze Zusammenfassung des Inhalts der einzelnen Abschnitte gegeben.

Ausgangspunkt dieser Arbeit über 3D Volumenelemente sind die Artikel von *Simo, Rifai* [1990], *Simo, Armero* [1992] und *Simo, Armero, Taylor* [1993]. In diesen Artikeln wurde eine neue Methode vorgestellt, die es erlaubt, die bekannten Versteifungseffekte von Elementen mit bilinearen (4-Knoten Scheibenelement) und trilinearen (8-Knoten Hexaeder) Ansatzfunktionen zu beseitigen oder abzuschwächen. Diese sog. „Enhanced Assumed Strain“ Methode (EAS) bietet eine elegante Möglichkeit das bewährte 8-Knoten Volumenelement bei der Berechnung inkompressibler Materialien oder der Simulation von Strukturen einzusetzen, die durch Biegung beansprucht werden. Man schreibt in diesem Zusammenhang auch von einer Beseitigung der Biegeversteifung und der volumetrischen Versteifung des konventionellen 8-Knoten Verschiebungselementes. Für lineare Anwendungen erwiesen sich die EAS-Elemente als überaus erfolgreich. Wenn in den numerischen Simulationen geometrische und materielle Nichtlinearitäten berücksichtigt werden, zeigen sich teilweise schwerwiegende Nachteile gegenüber anderen, „klassischen“ Elementen für nichtlineare Berechnungen wie dem Q1P0- (*Simo, Taylor, Pister* [1985]) und dem SRI-Element (*Hughes, Malkus* [1978]). Die geringe Effizienz der EAS-Elemente wird durch die neun bis zwölf inneren Elementparameter verursacht. Letztere müssen durch eine zeitaufwendige statische Kondensation, d.h. eine Inversion einer  $9 \times 9$  bis  $12 \times 12$  Matrix, auf Elementebene eliminiert werden. Da die Elementfreiheitsgrade zur Spannungsberechnung benötigt werden, muß hierfür zusätzlicher Speicher reserviert werden. Dieser hohe Aufwand im Vergleich zum Q1P0- und SRI-Element wird durch die bessere Erfassung der Biegesteifigkeit solcher EAS-Elementformen gerechtfertigt, bei denen drei charakteristische Längen erheblich voneinander abweichen. Bei dieser Argumentation bleibt jedoch unberücksichtigt, daß die eigentliche Herausforderung für die Elemententwicklung das (nahezu) inkompressible Deformationsverhalten vieler Werkstoffe bei großen Verzerrun-

gen darstellt. Die Simulation der Umformung elasto-plastischer Metalle wie der Verformung von hyperelastischen Materialien (z.B. Gummi) kann auch mit Elementen erfolgen, die ausschließlich die volumetrische Versteifung unterdrücken. Eine weitere Eigenschaft nichtlinearer EAS-Elemente ist das ausgeprägte Auftreten von numerischen „hour-glass“-Instabilitäten. Mit Hilfe spezieller Stabilisierungstechniken (*Glaser, Armero* [1997], *Wriggers, Reese* [1996]) kann dieses Problem für das Ogden-Materialgesetz gelöst werden. Auch bei anderen nichtlinearen Elementen (Q1P0-, SRI- und  $\bar{\mathbf{F}}$ -Element) tritt „hour-glassing“ auf. Wie numerische Beispiele zeigen, sind diese aber erheblich weniger anfällig für einen Rangabfall der Element- und Struktursteifigkeitsmatrizen als EAS-Elemente und können auf einfache Weise stabilisiert werden.

Nach den obigen Ausführungen ist es folgerichtig, sich auf die Beseitigung der volumetrischen Versteifung bei 8-Knoten Hexaedern zu konzentrieren. Um den Blick auf das Wesentliche der nichtlinearen Elementformulierung nicht zu verstellen, beschränkt sich die vorliegende Untersuchung auf allgemeine hyperelastische Werkstoffe. Damit können Materialien modelliert werden, für die eine Verzerrungsenergiedichte  $W = f(\mathbf{C})$  als Funktion des rechten Cauchy-Green Tensors  $\mathbf{C}$  existiert. Andere Materialmodelle wie Elasto-Plastizität für große Deformationen können ohne Schwierigkeiten in die vorgestellten Elemente eingebaut werden (siehe hierzu Dissertation *Doll* [1998]).

In Abschnitt 2 werden einige für das Verständnis notwendige Grundlagen und Schreibweisen bereitgestellt. Da diese Arbeit nicht den Anspruch erhebt, ein Lehrbuch zu sein, wird auf eine Wiedergabe allgemein bekannter Grundlagen der FEM und der Kontinuumsmechanik verzichtet.

In Abschnitt 3 wird die lineare EAS-Formulierung ausführlich dargestellt und untersucht. Es werden verschiedene EAS-Elemente für unterschiedliche Anforderungen entwickelt und diskutiert. Unter dem Gesichtspunkt der Effizienz wird ein Weg vorgeschlagen, die Steifigkeitsmatrizen von Hexaedern beliebiger Geometrie mit möglichst geringem Aufwand zu berechnen. Die Auswirkung der Elementgeometrie auf die Qualität der EAS-Elemente wird anhand von Quader, Parallelepiped und allgemeinem Hexaeder dargestellt. Einige repräsentative numerische Beispiele zeigen die Möglichkeiten aber auch die Grenzen der ursprünglichen wie der modifizierten EAS-Methode.

In Abschnitt 4 wird die EAS-Formulierung für die Simulation nichtlinearer Probleme beschrieben. Leider gibt es keine Möglichkeit, wie im linearen Bereich durch Modifikationen der originalen Methode nach *Simo et al.* [1992,1993] die Effizienz der Elemente zu steigern. Besonderes Interesse gilt in diesem Abschnitt der Frage, wie die EAS-Methode die Zwangsbedingung der Inkompressibilität punktweise erfüllen kann.

In Abschnitt 5 werden die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente vorgestellt und diskutiert. Hier wird gezeigt, wie durch eine Modifikation der Elementdilatation und damit des Deformationsgradienten die volumetrische Versteifung beseitigt werden kann. Besonderer Wert wird auf die Herausarbeitung der Unterschiede in der Steifigkeitsmatrix und dem Elementkraftvektor zur konventionellen Verschiebungsformulierung gelegt. Zwei konkrete  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operatoren und die

zugehörigen Elemente werden beschrieben. Beendet wird dieser Abschnitt durch die Untersuchung einer sog. inkonsistenten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung, die zwingend zu einer unsymmetrischen Tangentensteifigkeitsmatrix führt.

Abschnitt 6 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Q1P0-Element, das auf einem 3-Feld Funktional mit unabhängigen Verschiebungen, Druck und Dilatation basiert, mit dem  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formalismus.

In Abschnitt 7 werden die in Abschnitt 5 vorgestellten Elemente für einen in der Praxis wichtigen Spezialfall untersucht: hyperelastische Werkstoffgesetze mit Entkopplung von isochorem und volumetrischem Verformungsverhalten. Nicht nur aus Gründen einer effizienten Programmierung ist es sinnvoll, Elemente mit dieser Materialmodellierung in einem eigenen Abschnitt zu untersuchen. Auch das in der Praxis der Simulation sehr wichtige SRI-Element kann in die Untersuchung einbezogen und mit den  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elementen verglichen werden.

Abschnitt 8 behandelt die numerische Instabilität von 8-Knoten Hexaedern bei homogener Kompression. Es wird beispielhaft anhand von SRI- und Q1P0-Element gezeigt, daß die Instabilität durch Addition einer Stabilisierungsmatrix zur Elementsteifigkeitsmatrix überwunden werden kann. Einige numerische Simulationen machen die Problematik deutlich, die beim Einsatz dieser Stabilisierung besteht, speziell das Problem der geeigneten Wahl des Stabilisierungsparameters.

Abschnitt 9 beendet die vorliegende Arbeit mit einer Zusammenfassung und der Bewertung der wesentlichen Ergebnisse. Ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungen bei der Elementformulierung soll einen Weg zeigen, Defizite derzeitiger „nichtlinearer“ 8-Knoten Elemente zu beseitigen.

# Kapitel 2

## Grundlagen

Dieser Abschnitt soll kein Lehrbuch zur Kontinuumsmechanik oder zur Methode der Finiten Elemente ersetzen. Eine ausführliche Wiedergabe allgemein bekannter Sätze, Definitionen und Herleitungen erfolgt daher nicht. Auf eine Einführung isoparametrischer Volumenelemente wird aus denselben Gründen verzichtet, wie auf die Grundlagen der Tensorrechnung oder der Kontinuumsmechanik. Es werden nur Bezeichnungen und Definitionen aus der Mechanik und der FEM kurz erläutert, die für das Verständnis und eine leichte Lesbarkeit der folgenden Ausführungen erforderlich sind. Für eine intensive Beschäftigung mit einzelnen Themenbereichen steht die einschlägige Fachliteratur zur Verfügung (z.B. die Bücher von *Betten* [1993], *Crisfield* [1991/96], *Zienkiewicz, Taylor* [1989] und *Simo, Hughes* [1998]).

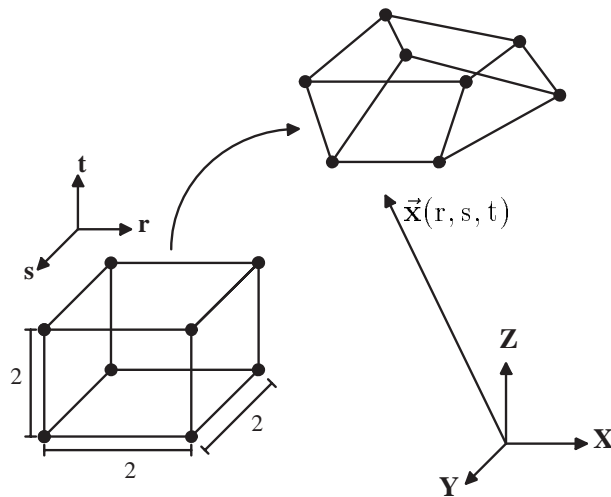


Abb. 1: Das isoparametrische Konzept

Die Verschiebungen  $\vec{u} = (u, v, w)^T$  und die Komponenten des Ortsvektors  $\vec{x} = (x, y, z)^T$  werden im 8-Knoten Element durch Knotenverschiebungen  $u_i, v_i, w_i$  bzw. Knotenkoordi-

naten  $x_i, y_i, z_i$  und die konventionellen trilinearen Form- oder Ansatzfunktionen

$$N^i := \frac{1}{8} (1 + r_i r) (1 + s_i s) (1 + t_i t) \quad (i = 1 \dots 8) \quad (2.1)$$

dargestellt (siehe Abb 1.1). Dieses Vorgehen bedeutet eine Approximation der Verschiebungen und der Geometrie an den Elementknoten, sowie eine Interpolation im Element mit den Knotenwerten von  $\vec{\mathbf{u}}$  und  $\vec{\mathbf{x}}$  als Interpolationsstützpunkten.

Für eine kompakte Darstellung werden die acht Formfunktionen im Vektor  $\vec{\mathbf{n}}$  und die Knotenwerte der Verschiebungskomponenten in x-, y- und z-Richtung in den Vektoren  $\vec{\mathbf{u}}_n, \vec{\mathbf{v}}_n$  und  $\vec{\mathbf{w}}_n$  zusammengefaßt. Entsprechend werden aus den Ortskoordinaten der acht Elementknoten drei Vektoren  $\vec{\mathbf{x}}_n, \vec{\mathbf{y}}_n$  und  $\vec{\mathbf{z}}_n$  gebildet.

$$\vec{\mathbf{n}} := (N^1, \dots, N^8)^T, \quad \vec{\mathbf{u}}_n := (u^1, \dots, u^8)^T, \quad \vec{\mathbf{x}}_n := (x^1, \dots, x^8)^T; \quad (2.2)$$

Weiter können die Knotenverschiebungen und Knotenkoordinaten zu jeweils einem einzigen Vektor mit je 24 Komponenten zusammengesetzt werden. Diese Darstellung wird bei der Untersuchung des diskretisierten Verzerrungstensors verwendet.

$$\vec{\mathbf{u}}_e := (\vec{\mathbf{u}}_n^T, \vec{\mathbf{v}}_n^T, \vec{\mathbf{w}}_n^T)^T = (u^1, \dots, u^8, v^1, \dots, v^8, w^1, \dots, w^8)^T \quad \vec{\mathbf{u}}_e \in \mathbb{R}^{24} \quad (2.3)$$

$$\vec{\mathbf{x}}_e := (\vec{\mathbf{x}}_n^T, \vec{\mathbf{y}}_n^T, \vec{\mathbf{z}}_n^T)^T = (x^1, \dots, x^8, y^1, \dots, y^8, z^1, \dots, z^8)^T \quad \vec{\mathbf{x}}_e \in \mathbb{R}^{24} \quad (2.4)$$

Mit den in (2.2), (2.3) und (2.4) definierten Knotenvektoren lassen sich das Verschiebungs- und das Ortsvektorfeld in übersichtlicher Weise darstellen.

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{pmatrix} N^i u^i \\ N^i v^i \\ N^i w^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{u}}_n \\ \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{v}}_n \\ \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{w}}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{n}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}^T \end{bmatrix} \vec{\mathbf{u}}_e \quad (2.5)$$

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{pmatrix} N^i x^i \\ N^i y^i \\ N^i z^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{x}}_n \\ \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{y}}_n \\ \vec{\mathbf{n}}^T \vec{\mathbf{z}}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{n}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}^T \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}}_e \quad (2.6)$$

Um Verzerrungen berechnen zu können, werden die Ableitungen der Verschiebungen nach den kartesischen Koordinaten benötigt. Diese erhält man mittels der Jacobi-matrix  $\mathbf{J}$ . Gleichung (2.7) zeigt den Zusammenhang zwischen den Ableitungen einer beliebigen Funktion  $f$  nach isoparametrischen und den Ableitungen nach kartesischen Koordinaten.



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Nach *Belytschko et al.* [1984] können die Formfunktionen  $N_i$  in eine Summe aus einem konstanten Term, drei in den kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  linearen Polynomen und vier sog. „hour-glass“ Funktionen  $g_i$  entwickelt werden.

$$g_1 = r s, \quad g_2 = r t, \quad g_3 = s t, \quad g_4 = r s t \quad (2.8)$$

dargestellt werden (siehe hierzu auch *Simo et al.* [1993]). Für den Vektor  $\vec{\mathbf{n}}$  gilt deshalb Gleichung (2.9).

$$\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{n}}_c + x \vec{\mathbf{b}}_x + y \vec{\mathbf{b}}_y + z \vec{\mathbf{b}}_z + g_1 \vec{\gamma}_1 + g_2 \vec{\gamma}_2 + g_3 \vec{\gamma}_3 + g_4 \vec{\gamma}_4 \quad (2.9)$$

In Gleichung (2.9) bestimmen die Vektoren  $\vec{\mathbf{b}}_x$ ,  $\vec{\mathbf{b}}_y$  und  $\vec{\mathbf{b}}_z$  die konstanten Verzerrungen im Element. Da (2.9) als eine Taylorreihenentwicklung von  $\vec{\mathbf{n}}$  um den Elementmittelpunkt interpretiert werden kann, sind diese drei Vektoren die partiellen Ableitungen des Vektors der Formfunktionen nach den kartesischen Koordinaten, ausgewertet an der Stelle  $r = 0$ ,  $s = 0$  und  $t = 0$ .

$$(\vec{\mathbf{b}}_x, \vec{\mathbf{b}}_y, \vec{\mathbf{b}}_z) = \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{n}}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{\mathbf{n}}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{\mathbf{n}}}{\partial z} \right)_{(r,s,t=0)} \quad (2.10)$$

Der Vektor der „Translationen“  $\vec{\mathbf{n}}_c$  – der Wert von  $\vec{\mathbf{n}}$  am Elementmittelpunkt – wird nach der folgenden Gleichung berechnet.

$$\vec{\mathbf{n}}_c = \vec{\mathbf{e}} \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{e}}^T \vec{\mathbf{x}}_n) \vec{\mathbf{b}}_x \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{e}}^T \vec{\mathbf{y}}_n) \vec{\mathbf{b}}_y \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{e}}^T \vec{\mathbf{z}}_n) \vec{\mathbf{b}}_z \quad , \quad \vec{\mathbf{e}} = \frac{1}{8} (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T \quad (2.11)$$

Die im Restglied der Taylorreihenentwicklung (2.9) auftretenden  $\vec{\gamma}$ -Vektoren sind die von *Belytschko* eingeführten sog. vier  $\vec{\gamma}$ -Projektionsvektoren.

$$\vec{\gamma}_i = \vec{\mathbf{h}}_i \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{h}}_i^T \vec{\mathbf{x}}_n) \vec{\mathbf{b}}_x \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{h}}_i^T \vec{\mathbf{y}}_n) \vec{\mathbf{b}}_y \Leftrightarrow (\vec{\mathbf{h}}_i^T \vec{\mathbf{z}}_n) \vec{\mathbf{b}}_z \quad (i = 1..4) \quad (2.12)$$

Falls die Jacobi-Matrix im Element konstant ist – das Element besitzt dann die Form eines Quaders oder Parallelepipeds – reduzieren sich die  $\vec{\gamma}$ -Vektoren auf die einfacheren „hour-glass“ Vektoren  $\vec{\mathbf{h}}_1 \dots \vec{\mathbf{h}}_4$ .

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{h}}_1, \vec{\mathbf{h}}_2, \vec{\mathbf{h}}_3, \vec{\mathbf{h}}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & +1 & +1 \\ +1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 1 & +1 & \Leftrightarrow 1 & +1 \\ +1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & +1 \\ \Leftrightarrow 1 & +1 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \\ \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 1 & +1 & \Leftrightarrow 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

In der FEM wird gewöhnlich die Vektor-Darstellung für Tensoren zweiter Stufe benutzt. Die sechs unabhängigen Elemente eines symmetrischen Tensors, z. B. der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , werden dabei zu einem Vektor  $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$  zusammengefaßt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T \quad (2.14)$$

Der Vektor der sog. Ingenieurdehnungen  $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}$ , der aus dem linearen oder infinitesimalen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  gebildet wird, besitzt die besondere Eigenschaft, daß statt der Sche- rungen  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{xz}$  und  $\epsilon_{yz}$  die Gleitungen  $\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy}$ ,  $\gamma_{xz} = 2 \epsilon_{xz}$  und  $\gamma_{yz} = 2 \epsilon_{yz}$  verwendet werden.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \vec{\boldsymbol{\epsilon}} = (\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})^T \quad (2.15)$$

Der lineare Verzerrungstensor ist der symmetrische Anteil des Verschiebungsgradienten

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{\mathbf{u}} + \text{grad}^T \vec{\mathbf{u}})$$

und besitzt in einer kartesischen Basis die Matrixdarstellung (2.16). Da auch inkompatible Verzerrungen (s. Abschnitt 3.1) bei der Formulierung von 8-Knoten Volumenelementen benutzt werden, erhält der kompatible Verzerrungstensor den Index u.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Der diskretisierte symmetrische Anteil des Verschiebungsgradienten wird durch die Matrix  $\mathbf{B}$ , die die Verzerrungen mit den Knotenverschiebungen verknüpft, und die Knotenverschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_e$  ausgedrückt. Für die Darstellung von  $\mathbf{B}$  werden die Definitionen in Gleichung (2.17) verwendet.

$$N_x^i := \frac{\partial N^i}{\partial x} \quad , \quad \vec{\mathbf{n}}_x^T := \frac{\partial \vec{\mathbf{n}}^T}{\partial x} = (N_x^1, \dots, N_x^8)^T \quad (2.17)$$

Damit ergibt sich für den Vektor der Ingenieurdehnungen die Darstellung in (2.18).

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{n}}_x^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}_y^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}_z^T \\ \vec{\mathbf{n}}_y^T & \vec{\mathbf{n}}_x^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{n}}_z^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}_x^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{n}}_z^T & \vec{\mathbf{n}}_y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{u}}_n \\ \vec{\mathbf{v}}_n \\ \vec{\mathbf{w}}_n \end{bmatrix} = \mathbf{B} \vec{\mathbf{u}}_e, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 24} \quad (2.18)$$

Statt (2.18) kann die  $\mathbf{B}$ -Matrix auch aus  $6 \times 3$  Matrizen aufgebaut sein (Gl. (2.19)). Diese „knotenorientierte“ Konstruktion erweist sich oft als vorteilhaft gegenüber (2.18).

$$\vec{\epsilon} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_x^i & 0 & 0 \\ 0 & N_y^i & 0 \\ 0 & 0 & N_z^i \\ N_y^i & N_x^i & 0 \\ N_z^i & 0 & N_x^i \\ 0 & N_z^i & N_y^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{B}_i \vec{\mathbf{u}}_e^i, \quad \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{6 \times 3}, \quad \vec{\mathbf{u}}_e^i \in \mathbb{R}^3 \quad (2.19)$$

Aufgrund der Darstellung von  $\vec{\mathbf{n}}$  in (2.9) zerfällt die  $\mathbf{B}$ -Matrix der konventionellen Verschiebungsformulierung in eine konstante Matrix  $\mathbf{B}_c$  und eine nichtkonstante, ortsabhängige Matrix  $\mathbf{B}_h$ .

$$\vec{\epsilon} = \mathbf{B} \vec{\mathbf{u}}_e = (\mathbf{B}_c + \mathbf{B}_h) \vec{\mathbf{u}}_e \quad (2.20)$$

Mit der konstanten Matrix  $\mathbf{B}_c$  werden im Element die homogenen Verzerrungsanteile berechnet. Aus Konvergenzgründen müssen die konstanten Verzerrungen in allen Elementformulierungen übereinstimmen (s. *Zienkiewicz, Taylor* [1989]).

$$\mathbf{B}_c^T = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{b}}_x & \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{b}}_y & \vec{\mathbf{b}}_z & \vec{\mathbf{o}} \\ \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{b}}_y & \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{b}}_x & \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{b}}_z \\ \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{b}}_z & \vec{\mathbf{o}} & \vec{\mathbf{b}}_x & \vec{\mathbf{b}}_y \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Die ortsabhängige Matrix  $\mathbf{B}_h$  der Verschiebungsmethode enthält die Terme, die die unerwünschte volumetrische Versteifung und die Biegeversteifung verursachen (s. Abschnitt 3.2.1 und 3.2.2). Diese Matrix muß deshalb in einer versteifungsfreien Formulierung wie der EAS-Methode verändert werden. Die Matrix  $\mathbf{B}_h$  dient auch als Stabilisierung für die Matrix  $\mathbf{B}_c$ , denn eine Steifigkeitsmatrix, die nur mit der homogenen Matrix  $\mathbf{B}_c$  statt mit  $\mathbf{B}$  gebildet wird, besitzt den Rang 6. Damit keine numerischen Instabilitäten auftreten, muß die Steifigkeitsmatrix eines 8-Knoten Hexaeders den Rang 18 besitzen.

$$\mathbf{B}_h^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_k}{\partial x} \vec{\gamma}_k & \vec{0} & \vec{0} & \frac{\partial g_k}{\partial y} \vec{\gamma}_k & \frac{\partial g_k}{\partial z} \vec{\gamma}_k & \vec{0} \\ \vec{0} & \frac{\partial g_k}{\partial y} \vec{\gamma}_k & \vec{0} & \frac{\partial g_k}{\partial x} \vec{\gamma}_k & \vec{0} & \frac{\partial g_k}{\partial z} \vec{\gamma}_k \\ \vec{0} & \vec{0} & \frac{\partial g_k}{\partial z} \vec{\gamma}_k & \vec{0} & \frac{\partial g_k}{\partial x} \vec{\gamma}_k & \frac{\partial g_k}{\partial y} \vec{\gamma}_k \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Die entscheidende kinematische Größe in geometrisch nichtlinearen Problemen ist der Deformationsgradient. Dieser Tensor zweiter Stufe transformiert infinitesimale Linienelemente in der Referenzkonfiguration in infinitesimale Linienelemente in der Momentankonfiguration.

$$d\vec{x}_t = \mathbf{F} d\vec{x}_{\text{ref}}$$

Größen die sich auf die Ausgangs- oder Referenzkonfiguration beziehen, werden mit dem Index ref und solche, die sich auf die aktuelle oder momentane Konfiguration beziehen, werden mit dem Index  $t$  gekennzeichnet.

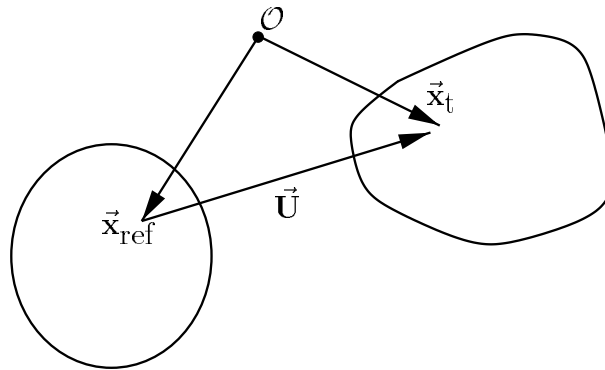


Abb. 1.1: Abbildung der Referenz- in die Momentankonfiguration

Der Verschiebungsvektor  $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{x}}_t \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}}_{\text{ref}}$  stellt den Zusammenhang von  $\mathbf{F}$  mit den Verschiebungsgradienten  $\text{GRAD} \vec{\mathbf{u}}$  und  $\text{grad} \vec{\mathbf{u}}$  her. Hier und im folgenden wird mit  $\text{GRAD}$  der Gradientenoperator bzgl. Koordinaten der Ausgangsgeometrie und mit  $\text{grad}$  der Gradient bzgl. Koordinaten der aktuellen Geometrie bezeichnet.

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{GRAD} \vec{\mathbf{u}} \quad (2.23)$$

In einer kartesischen Basis wird  $\mathbf{F}$  durch die Matrix in (2.24) repräsentiert.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x_{\text{ref}}} & \frac{\partial u}{\partial y_{\text{ref}}} & \frac{\partial u}{\partial z_{\text{ref}}} \\ \frac{\partial v}{\partial x_{\text{ref}}} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y_{\text{ref}}} & \frac{\partial v}{\partial z_{\text{ref}}} \\ \frac{\partial w}{\partial x_{\text{ref}}} & \frac{\partial w}{\partial y_{\text{ref}}} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_{\text{ref}}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Die Diskretisierung der Matrix in (2.24) mittels (2.5) führt aufgrund der Unsymmetrie von  $\mathbf{F}$  in Analogie zu (2.18) und (2.19) auf eine  $9 \times 24$  Matrix bzw. acht  $9 \times 3$  Matrizen. Eine große Bedeutung bei der Formulierung nichtlinearer Finiten Elemente (s. Abschnitt 4-7) besitzt das Verhalten von  $\mathbf{F}$  für Starrkörperdrehungen. Wenn die Abbildung  $\vec{\mathbf{x}}_t(\vec{\mathbf{x}}_{\text{ref}})$  den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  besitzt, dann führt eine anschließende Starrkörperdrehung des verformten Körpers  $d\vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{Q} d\vec{\mathbf{x}}_t$ , mit  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  und  $\det(\mathbf{Q}) = 1$ , zum Deformationstensor  $\mathbf{F}' = \mathbf{Q} \mathbf{F}$ .

$$d\vec{\mathbf{x}}' = \mathbf{Q} d\vec{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q} \mathbf{F} d\vec{\mathbf{x}}_{\text{ref}} = \mathbf{F}' d\vec{\mathbf{x}}_{\text{ref}} \implies \mathbf{F}' = \mathbf{Q} \mathbf{F} \quad (2.25)$$

Der mit  $\mathbf{F}$  gebildete symmetrische, positiv definite rechte Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F},$$

der im Gegensatz zu  $\mathbf{F}$  ein Verzerrungstensor ist, wird in den Abschnitten über die nichtlinearen Elementformulierungen verwendet.

Für die Formulierung von Materialgesetzen und die Entwicklung von 8-Knoten Hexaedern im geometrisch nichtlinearen Bereich werden auch der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , der Kirchhoffsche Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  und der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  verwendet. (2.26) zeigt den Zusammenhang dieser drei Spannungen.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = J \boldsymbol{\tau}, \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.26)$$

Für die Berechnung der Tangentensteifigkeitsmatrizen in einer nichtlinearen FE-Simulation werden außer den Spannungen (2.26) auch objektive Zeitableitungen dieser Spannungen bzw. objektive Spannungsraten benötigt (siehe hierzu *Crisfield* [1997] und *Simo, Hughes* [1998]). Die Truesdellsche Rate des Kirchhoffschen und des Cauchyschen Spannungstensors, gekennzeichnet durch den Index tr, sind in (2.27) und (2.28) definiert. Ein Punkt ohne Index bezeichnet die materielle zeitliche Ableitung der Spannungstensenoren, die bekanntlich mit Ausnahme der Ableitung von  $\dot{\mathbf{S}}$  nicht objektiv ist.

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{\text{tr}} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \dot{\boldsymbol{\tau}} \Leftrightarrow (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \boldsymbol{\tau} \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T \quad (2.27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{tr}} = \frac{1}{J} \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\text{TR}} \quad (2.28)$$

Der Zusammenhang zwischen den Spannungsraten und den zeitlichen Änderungen der Verzerrungen ist in (2.29) dargestellt. Die Größen  $\mathcal{C}_{\boldsymbol{\tau}}$  und  $\mathcal{C}_{\mathbf{S}}$  sind Tensoren vierter Stufe, die sog. Werkstofftensoren.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= \mathcal{C}_{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{C}} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}_{tr} &= \mathcal{C}_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{d} \quad , \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T) \end{aligned} \quad (2.29)$$

# Kapitel 3

## Die lineare EAS-Methode

Der Ausgangspunkt für die nachfolgenden Untersuchungen und die Entwicklung eines neuen 3D Festkörper Elements ist eine kurze Herleitung der allgemeinen linearen „enhanced assumed strain“ (EAS) Formulierung, die von *Simo, Rifai* [1990] entwickelt wurde. Ihr bahnbrechender Artikel hat eine ganze Flut von Beiträgen zur FEM ausgelöst und ihre Überlegungen und Darlegungen sind auch heute noch grundlegend.

Erweiterte inkompatible Verzerrungen wurden von *Simo et al.* eingeführt, um die Defizite des 8-Knoten Standardelementes zu beseitigen. Es handelt sich dabei einerseits um die volumetrische Versteifung bei quasi-inkompressiblem Material und andererseits um die Biegeversteifung. Die Auswirkungen der EAS-Terme auf die Kinematik der Verschiebungsformulierung können auf einfache und übersichtliche Weise anhand eines achsenparallelen Quaders dargestellt und diskutiert werden. Daher beschäftigt sich Abschnitt 3.2 zunächst mit der Anwendung der EAS-Methode auf diese speziellen Hexaeder. Die aus der statischen Kondensation der EAS-Freiwerte resultierenden ortsabhängigen  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrizen (siehe Abschnitt 3.1) können für achsenparallele Quader explizit und analytisch, d.h. als Funktionen der Material- und Geometrieparameter berechnet werden. Dadurch wird eine analytische Eigenwertuntersuchung der Elementsteifigkeitsmatrix möglich, was die theoretische Untersuchung der Vor- und Nachteile einer speziellen EAS-Formulierung erlaubt. Ausgehend von der Formulierung von EAS-Elementen für achsenparallele Quader werden anschließend beliebig orientierte Quader und Parallelepipede in Abschnitt 3.3 untersucht. Abschnitt 3.4 befaßt sich dann mit Hexaedern beliebiger Gestalt und Orientierung. Die Jacobi-Matrix solcher Elemente ist ortsabhängig und die  $\mathbf{H}$ -Matrix daher vollbesetzt. Die Konsequenz ist, daß sich die  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix nicht mehr geschlossen darstellen läßt. Es wird sich auch zeigen, daß Modifikationen an der ursprünglichen EAS-Formulierung von *Simo, Rifai* [1990] unumgänglich sind, um für allgemeine Hexaeder ein zuverlässiges, d.h. versteifungsfreies und nicht-kinematisches sowie effizientes Element zu erhalten. Eine solche Modifikation wurde erstmals von *Simo et al.* [1993] vorgeschlagen. Darauf aufbauend wird in Abschnitt 3.6 eine weitere Methode vorgeschlagen, um ein versteifungsfreies und stabiles Element zu erhalten.

### 3.1 Grundlagen

Die variationelle Grundlage der Überlegungen von *Simo et al.*, die zu einer neuen Methode für die Formulierung von versteifungsfreien dreidimensionalen 8-Knoten Elementen führt, ist das Hu-Washizu Funktional mit unabhängigen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$ , unabhängigen Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}$ , unabhängigen Verschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}$  und dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten  $\boldsymbol{\epsilon}_u$ :

$$\Pi_{HW} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_e} \boldsymbol{\epsilon} \circ \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV_e + \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma} \circ (\boldsymbol{\epsilon}_u \Leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}) dV_e + \Pi_{ext}(\vec{\mathbf{u}}) \quad (3.1)$$

$\Pi_{ext}$  ist das Funktional der äußeren Lasten, also das Funktional der Volumen- und Oberflächenkräfte.  $V_e$  ist das Elementvolumen und der Tensor vierter Stufe  $\mathbf{C}$  ist der Werkstofftensor. Nach dem Übergang zu der in der FEM üblichen Matrix-Vektor Schreibweise wird dieser Tensor durch die sog. Spannungs-Verzerrungsmatrix  $\mathbf{C}$  ersetzt, die für ein elastisch isotropes Material die folgende Form besitzt:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_1 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & E_2 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

Die Konstanten  $E_1$ ,  $E_2$  und  $G$  sind wie folgt definiert:

$$E_1 = \frac{E(1 \Leftrightarrow \nu)}{(1 + \nu)(1 \Leftrightarrow 2\nu)}, \quad E_2 = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 \Leftrightarrow 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Die einzigen Materialkonstanten in der linearen, isotropen Theorie sind der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl oder Poissonzahl  $\nu$ .

Die Strategie von *Simo, Rifai* [1990] besteht darin, die Verzerrungen des konventionellen Verschiebungselementes  $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}_u$  durch die sog. inkompatiblen Verzerrungen  $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)}$  zu erweitern, um damit die Darstellung der Verzerrungen bei größeren FE-Diskretisierungen zu verbessern. Die Gesamtverzerrungen setzen sich dann im linearen Fall additiv aus diesen zwei Verzerrungen zusammen. Die Komponenten von  $\vec{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)}$  sind im Element durch lokale Elementparameter (zusammengefaßt im Vektor  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$ ) und Interpolationsfunktionen (zusammengefaßt in der Matrix  $\mathbf{G}$ ) definiert.

$$\vec{\boldsymbol{\epsilon}} = \vec{\boldsymbol{\epsilon}}_u + \vec{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)} = \mathbf{B} \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{G} \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e \quad \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e \in \mathbb{R}^{eas} \quad (3.2)$$



Die Wahl der inkompatiblen Interpolationsfunktionen  $\mathbf{G}$  und die Bestimmung der internen Elementparameter  $\vec{\varphi}_e$  sind für die Qualität eines EAS-Elements entscheidend. Aus diesem Grunde müssen Wege gefunden werden, die Auswahl der Interpolationsfunktionen systematisch vorzunehmen.

Setzt man das obige Verzerrungsfeld (3.2) der EAS-Methode in das Hu-Washizu 3-Feld Funktional (3.1) ein, so erhält man das folgende Funktional:

$$\Pi_{HW} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_e} \vec{\epsilon}^T \mathbf{C} \vec{\epsilon} dV_e + \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_e} \vec{\sigma}^T \vec{\epsilon}^{(i)} dV_e + \Pi_{ext}(\vec{\mathbf{u}}) \quad . \quad (3.3)$$

Dieses Funktional enthält noch die Spannungen  $\vec{\sigma}$ . Mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{V_e} \vec{\sigma}^T \vec{\epsilon}^{(i)} dV_e = 0 \quad , e = 1 \dots n_{elm} \quad (3.4)$$

können die Spannungen im Funktional eliminiert werden. Das Resultat ist ein 2-Feld Funktional für kompatible und inkompatible Verzerrungen bzw. für das Verschiebungs- und das inkompatible Verzerrungsfeld. Im Fall konservativer Probleme kann (3.5) als verallgemeinerte potentielle Energie des elastischen Körpers interpretiert werden.

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_e} (\vec{\epsilon}_u + \vec{\epsilon}^{(i)})^T \mathbf{C} (\vec{\epsilon}_u + \vec{\epsilon}^{(i)}) dV_e + \Pi_{ext}(\vec{\mathbf{u}}) \quad (3.5)$$

Die weitere Entwicklung der EAS-Methode wird von den Spannungen nicht mehr beeinflusst. Da mit linear-elastischen FE-Simulationen aber in erster Linie die Spannungsverteilung analysiert werden soll, ist es von Interesse Spannungen so zu berechnen, daß Gleichung (3.4) nicht nur für homogene Spannungen erfüllt wird, was immer möglich ist (s.u.). Eine ausführliche Darstellung der Spannungsberechnung in Verbindung mit der EAS-Methode findet sich bei *Simo, Rifai* [1990]. *Andelfinger, Ramm* [1993] und *Bischoff, Ramm* [1998] untersuchten den Zusammenhang der EAS-Methode mit der Formulierung nach Hellinger-Reissner, die auf der Unabhängigkeit der Elementspannungen basiert, um auf diese Weise variationell konsistente Spannungen zu erhalten.

Die Forderung nach Orthogonalität zwischen  $\vec{\sigma}$  und  $\vec{\epsilon}^{(i)}$  muß zumindest für beliebige **konstante** Spannungszustände erfüllt sein.

$$\int_{V_e} \vec{\epsilon}^{(i)} dV_e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{V_e} \mathbf{G} dV_e = 0 \quad (3.6)$$

Die Gleichung (3.6) für die Matrix  $\mathbf{G}$  ist ein Kriterium, das über die Erfüllung des sog. Patch-Tests und damit über die Konvergenz einer speziellen EAS-Formulierung entscheidet. Die Sicherheit mit einer auch im streng mathematischen Sinne konvergenten EAS-Formulierung zu arbeiten, bietet ausschließlich eine  $\mathbf{G}$ -Matrix, die für **beliebige** Elementgeometrien Gleichung (3.6) erfüllt.

*Simo und Rifai* [1990] haben ein Verfahren zur Konstruktion der Interpolationsmatrix  $\mathbf{G}$  vorgeschlagen. Danach wird in isoparametrischen Koordinaten in der natürlichen Basis eine Matrix  $\mathbf{G}_\xi$  definiert und diese dann mittels einer im Element konstanten Matrix  $\mathbf{T}_c$  in das globale kartesische Koordinatensystem transformiert.

$$\mathbf{G} = \frac{j_c}{j} \mathbf{T}_c \mathbf{G}_\xi \quad (3.7)$$

Die Elemente von  $\mathbf{T}_c$  bestehen aus Produkten der am Elementmittelpunkt ausgewerteten Jacobi-Matrix. Der Faktor  $j_c/j$ , der Quotient aus der am Elementmittelpunkt  $\vec{\xi}_O = (0, 0, 0)^T$  ausgewerteten Jacobi-Determinante  $j_c$  und der am Ort  $\vec{\xi} = (r, s, t)^T$  berechneten Jacobi-Determinante  $j$ , garantiert die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung (3.6) für beliebige Elementgeometrien.

Die innere Energie ist nach der Diskretisierung der Verzerrungsfelder durch  $\mathbf{B}$ - und  $\mathbf{G}$ -Matrizen und nach der Diskretisierung von  $\Pi_{ext}$  durch den nachfolgenden Ausdruck gegeben.

$$\begin{aligned} \Pi \Leftrightarrow \Pi_{ext} = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elm}} \vec{\mathbf{u}}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} (\mathbf{B} \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{G} \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e) dV_e + \\ & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{elm}} \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e^T \int_{V_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C} (\mathbf{B} \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{G} \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e) dV_e \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Knotenverschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_e$  und Verzerrungsparameter  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$  einer Gleichgewichtslage, die sich unter den gegebenen Lasten und Randbedingungen einstellt, müssen das obige Potential minimieren. Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist durch das Verschwinden der ersten Variation der potentiellen Energie  $\delta\Pi = 0$  gegeben. Da Knotenverschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_e$  und EAS-Parameter  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$  unabhängig voneinander variiert werden, liefert die Gleichung  $\delta\Pi = 0$  zwei lineare Gleichungssysteme für die beiden gesuchten Vektoren  $\vec{\mathbf{u}}_e$  und  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$ . Die zweite Gleichung muß in jedem Element erfüllt werden.  $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$  ist der Knotenvektor

der äußeren Kräfte und  $\mathbf{A}$  in (3.9a) ist der FE-Assemblierungsoperator, der aus den

Elementmatrizen die Steifigkeitsmatrix der Gesamtstruktur aufbaut.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \quad \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e \quad \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e &= \vec{\mathbf{F}}_{ext} \\
\int_{V_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \quad \vec{\mathbf{u}}_e + \int_{V_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e \quad \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e &= \vec{\mathbf{0}} \quad e = 1 \dots n_{elm}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Unter Berücksichtigung der additiven Aufspaltung der  $\mathbf{B}$ -Matrix in einen konstanten und einen ortsabhängigen Summanden  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_h$  und dem Verschwinden der über das Elementvolumen gemittelten  $\mathbf{G}$ -Matrix (Gl. 3.6), liefert nur die ortsabhängige Matrix  $\mathbf{B}_h$  einen Beitrag zu der Kopplungsmatrix in Gleichung (3.9).

$$\int_{V_e} (\mathbf{B}_c + \mathbf{B}_h)^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e = \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e \quad , \quad \int_{V_e} \mathbf{G} dV_e = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

Durch die Einführung der folgenden Definitionen für die Elementmatrizen im Gleichungssystem (3.9):

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e & \mathbf{K} &\in \mathbb{R}^{24 \times 24} \\
\mathbf{H} &= \int_{V_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e & \mathbf{H} &\in \mathbb{R}^{eas \times eas} \\
\mathbf{L} &= \int_{V_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_h dV_e & \mathbf{L} &\in \mathbb{R}^{eas \times 24}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

kann (3.9) durch das übersichtlichere Gleichungssystem (3.12) ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \int_{V_e} \left[ \mathbf{K} \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{L}^T \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e \right] &= \vec{\mathbf{F}}_{ext} = \mathbf{A} \int_{V_e} \vec{\mathbf{F}}_e \\
\mathbf{L} \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{H} \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e &= \vec{\mathbf{0}} \quad e = 1 \dots n_{elm}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Die inkompatiblen Verzerrungen in der EAS-Methode sind dadurch charakterisiert, daß den EAS-Parametern  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$  keine äußeren Lasten entsprechen und die inkompatiblen Verzerrungen aufgrund ihres lokalen Charakters nur im Element stetig sind. Diese Tatsache kann dafür genutzt werden, die internen Elementfreiheitsgrade  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$  auf Elementebene zu eliminieren.

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e = \Leftrightarrow \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \vec{\mathbf{u}}_e \tag{3.13}$$

Die hierfür notwendige Inversion der Matrix  $\mathbf{H}$  ist für eine positiv definite Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}$  und kleine Verzerrungen stets möglich. Probleme in diesem Zusammenhang können aber im geometrisch und/oder materiell nichtlinearen Bereich (s. Abschnitt 4 und *de Borst et al.* [1995]) durchaus auftreten. Nach Einsetzen von Gleichung (3.13) in Gleichung (3.12) erhält man eine effektive Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{L}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \\ &= \int_{V_e} (\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L})^T \mathbf{C} (\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}) dV_e \\ &= \int_{V_e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} dV_e \quad \bar{\mathbf{B}} := \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Differenzen zwischen den verschiedenen EAS-Elementen und die Veränderung der Kinematik der konventionellen Verschiebungsformulierung durch eine bestimmte Wahl der  $\mathbf{G}$ -Matrix kommt in der neu definierten  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_h \Leftrightarrow \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{B}_e + \bar{\mathbf{B}}_h \quad (3.15)$$

deutlicher zum Ausdruck als in der  $\mathbf{H}$ - und  $\mathbf{L}$ -Matrix. Unterschiede bestehen insbesondere bzgl. der Effizienz, d.h. dem Aufwand für die Berechnung von  $\bar{\mathbf{B}}$  und  $\mathbf{K}_e$ . Die Berechnung der Matrix  $\bar{\mathbf{B}}_h$  erfordert die Invertierung der  $\mathbf{H}$ -Matrix. Für eine effiziente Elementformulierung ist es daher unumgänglich, den damit verbundenen Rechenaufwand gering zu halten. EAS-Parameter, die sich auf die Elementkinematik nicht auswirken, verursachen nur vermeidbare Kosten und sind daher überflüssig. Deshalb sollte der Anwender von EAS-Elementen wissen, welche und wie viele Freiheitsgrade für eine Unterdrückung der Versteifungseffekte bei gegebener Struktur und Lastverteilung genügen. Die EAS-Methode diesbezüglich zu verstehen und dann **systematisch** inkompatible Verzerrungsterme zu verwenden, ist das Ziel der nächsten Abschnitte.

## 3.2 EAS-Formulierung für Quader

Das einfachste dreidimensionale isoparametrische 8-Knoten Element ist ein Quader, dessen Kanten parallel zu den Basisvektoren des globalen kartesischen Koordinatensystems ausgerichtet sind. Dieser Spezialfall bzgl. Lage und Form eines 8-Knoten Hexaeders besitzt den Vorteil, daß die Eigenwerte der Elementsteifigkeitsmatrix nicht nur numerisch, sondern auch analytisch in Abhängigkeit der Materialparameter und der Quaderabmessungen berechnet werden können. Der Grund für diese bemerkenswerte Tatsache liegt in der schwachen Besetzung der  $\mathbf{H}$ -Matrix. Dann können für die Elemente der Inversen  $\mathbf{H}^{-1}$  geschlossene Ausdrücke angegeben werden. Im Falle eines allgemeinen Hexaeders ist solch eine Eigenwertuntersuchung nur numerisch möglich, wobei die Eigenmoden nicht mehr einfachen Deformationszuständen (wie etwa reiner Biegung) zugeordnet werden können.

Die Jacobi-Matrix eines achsenparallelen Quaders ist konstant und diagonal. Das bedeutet, daß die Ableitungen einer beliebigen Funktion  $f$  der Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$  proportional zu den Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

a,b,c: Kantenlängen des Quaders in x-,y- und z-Richtung (s. Abb. 2.1)

Der nichtkonstante, ortsabhängige Anteil  $\mathbf{B}_h$  der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix  $\mathbf{B}$  besitzt in dem dieser Untersuchung zugrunde liegenden Spezialfall eine sehr einfache und übersichtliche Gestalt. Im Gegensatz zu einer verformten Elementgeometrie können die Ursachen der Versteifung der Verschiebungsformulierung daher leicht erkannt werden.

$$\mathbf{B}_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + rt \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + rs \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + rt \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + rs \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + rs \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + rt \vec{\mathbf{h}}_4)^T \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$\vec{\mathbf{h}}_1, \dots, \vec{\mathbf{h}}_4$  sind die in der Einleitung (Abschnitt 2) definierten vier „hour-glass“ Vektoren.

Bevor spezielle EAS-Elemente vorgestellt werden, erfolgt ein Überblick über die Ursachen der Biegeversteifung und der volumetrischen Versteifung des konventionellen Verschiebungselements.

### 3.2.1 Biegeversteifung

Es ist anhand der  $\mathbf{B}_h$ -Matrix (3.17) deutlich zu erkennen, daß diejenigen linearen Normalverzerrungen, die bei Biegedeformationen aktiviert werden, mit linearen Scherungen gekoppelt sind. Zum Beispiel der Term  $s(\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n)$  der Normalverzerrung  $\epsilon_x$  und der Term  $r(\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n)$  der Scherung  $\gamma_{xy}$ . Eine reine Biegeverformung des Quaders kann wegen dieser Kopplung vom klassischen Verschiebungselement nicht exakt dargestellt werden. Bei dünnen Elementen, deren Kantenlängen stark unterschiedlich sind, wirkt sich diese Kopplung besonders negativ aus. Es tritt die sog. Biegeversteifung auf.

Die Knotenverschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_n \propto \vec{\mathbf{h}}_1$ ,  $\vec{\mathbf{v}}_n = \vec{\mathbf{o}}$ ,  $\vec{\mathbf{w}}_n = \vec{\mathbf{o}}$ , die einer Biegeverformung in x-Richtung um die z-Achse entsprechen, verursachen das nachfolgende ortsabhängige Verzerrungsfeld  $\vec{\epsilon}_h = \mathbf{B}_h \vec{\mathbf{u}}_e$ .

$$\vec{\epsilon}_h = \left( \frac{2}{a} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) s, \quad 0, \quad 0, \quad \frac{2}{b} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) r, \quad 0, \quad 0 \right)^T.$$

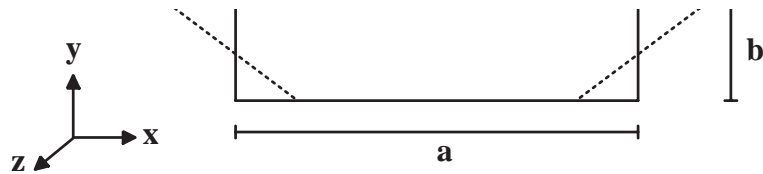


Abb. 2.1 : Biegung in x-Richtung um die z-Achse

Um die Biegeversteifung und die volumetrische Versteifung getrennt zu untersuchen, wird vereinfachend angenommen, daß die Querkontraktionszahl  $\nu = 0$  ist. Damit ergibt sich für die Verformungsenergie eine Summe von zwei Termen, den eigentlichen Biegeanteil  $\Pi_n$  und den parasitären Anteil  $\Pi_s$ , der mit der Scherung verbunden ist.

$$\Pi_i = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon_x \sigma_x dV_e}_{=: \Pi_n} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V_e} \gamma_{xy} \sigma_{xy} dV_e}_{=: \Pi_s} \quad (3.18)$$

$$\text{mit } \Pi_n = \frac{1}{2} \int_{V_e} E \epsilon_x^2 dV_e = \frac{2}{3} E \frac{b c}{a} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n)^2$$

$$\text{und } \Pi_s = \frac{1}{2} \int_{V_e} G \gamma_{xy}^2 dV_e = \frac{2}{3} G \frac{a c}{b} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n)^2$$

Mit zunehmendem Verhältnis der Elementlänge  $a$  zur Elementhöhe  $b$  ist eine unbegrenzte Zunahme der (Biege-) Energie verbunden. Aufgrund des Zusammenhangs von Verformungsenergie und Steifigkeitsmatrix  $\Pi_i = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_e \vec{\mathbf{u}}_e$  existiert daher für die sog. „Biegesteifigkeit“ ebenfalls keine obere Grenze. Bei festgehaltenen Verschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_n \propto \vec{\mathbf{h}}_1$  und

damit vorgegebenen Elementverformungen, wird also die Biegeversteifung alleine durch das falsche Anwachsen des Wertes der Scherung  $\gamma_{xy}$  verursacht.

$$\frac{\Pi_s}{\Pi_n} = \frac{G a^2}{E b^2} \overset{b \ll a}{\Leftrightarrow} \infty$$

Die Eigenwertuntersuchung derjenigen Elementformen, die ohne die Aktivierung der parasitären Scherungen reine Biegemoden darstellen würden, bestätigt die obige Aussage, die aufgrund energetischer Überlegungen gewonnen wurde. Es ergeben sich die folgenden „Biegeeigenwerte“ des Verschiebungselementes (alle für  $\nu = 0$ ):

- i) Biegung in x-Richtung um die z-Achse:  
 $e_1 = \frac{1}{6ab}(E c b^2 + G c a^2) \overset{a \gg b,c}{\Leftrightarrow} G \frac{c}{6b} a \Leftrightarrow \infty$
- ii) Biegung in x-Richtung um die y-Achse:  
 $e_2 = \frac{1}{6ac}(E b c^2 + G b a^2) \overset{a \gg b,c}{\Leftrightarrow} G \frac{b}{6c} a \Leftrightarrow \infty$
- iii) Biegung in y-Richtung um die z-Achse:  
 $e_3 = \frac{1}{6ab}(E c a^2 + G c b^2) \overset{b \gg a,c}{\Leftrightarrow} G \frac{c}{6a} b \Leftrightarrow \infty$
- iv) Biegung in y-Richtung um die x-Achse:  
 $e_4 = \frac{1}{6cb}(E a c^2 + G a b^2) \overset{b \gg a,c}{\Leftrightarrow} G \frac{a}{6c} b \Leftrightarrow \infty$
- v) Biegung in z-Richtung um die x-Achse:  
 $e_5 = \frac{1}{6ac}(E b a^2 + G b c^2) \overset{c \gg b,a}{\Leftrightarrow} G \frac{b}{6a} c \Leftrightarrow \infty$
- vi) Biegung in z-Richtung um die y-Achse:  
 $e_6 = \frac{1}{6cb}(E a b^2 + G a c^2) \overset{c \gg b,a}{\Leftrightarrow} G \frac{a}{6b} c \Leftrightarrow \infty$

Die Interpretation erfolgt exemplarisch für die ersten beiden Eigenwerte  $e_1$  und  $e_2$ : Die zugehörigen Steifigkeiten sind für  $a \gg c, b$  proportional zu  $a$ . Obwohl die Biegesteifigkeit des Kontinuums mit zunehmender Länge  $a$  des Quaders in x-Richtung immer kleiner wird, wird die entsprechende Steifigkeit des Verschiebungselementes immer größer. Ein Ziel bei der Anwendung des EAS-Formalismus muß daher die Korrektur dieses falschen Deformationsverhaltens sein.

### 3.2.2 Volumetrische Versteifung

Die volumetrische Elementversteifung, die im Zusammenhang mit quasi-inkompressiblen oder vollständig inkompressiblen Werkstoffen auftritt, wird durch fehlende Terme in den

drei Normalverzerrungen verursacht. Die Folge ist, daß die Spur (abgekürzt mit SP) des diskretisierten Verzerrungstensors nicht verschwindet. Die mit der Inkompressibilität verbundene Zwangsbedingung  $\text{SP}(\epsilon) = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$  kann von den ortsabhängigen Anteilen der Normalverzerrungen des konventionellen Verschiebungselementes nicht punktweise erfüllt werden. Die Konsequenz für das Deformationsverhalten kann wieder mit Hilfe der Verformungsenergie eines Elementes erklärt werden.

Die Verzerrungsenergie  $\Pi$  setzt sich additiv aus einem deviatorischen und einem volumetrischen oder dilatorischen Term zusammen. Wegen des Zusammenhangs zwischen Verformungsenergie und Steifigkeitsmatrix  $\Pi_i = \frac{1}{2} \vec{u}_e^T \mathbf{K}_e \vec{u}_e$  liefert die Untersuchung von  $\Pi$  auch Aufklärung über den relativen Beitrag von deviatorischen und volumetrischen Verformungen zur Elementsteifigkeit.

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \Pi_{dev} + \Pi_{vol} \\ &= G \int_{V_e} \epsilon_{dev} \circ \epsilon_{dev} dV_e + \frac{3}{2} K \int_{V_e} \epsilon_{vol} \circ \epsilon_{vol} dV_e \\ &= G \int_{V_e} \epsilon_{dev} \circ \epsilon_{dev} dV_e + \frac{K}{2} \int_{V_e} (\text{SP}(\epsilon))^2 dV_e \quad \text{mit} \quad K = \frac{2}{3} \frac{(1+\nu)}{(1 \Leftrightarrow 2\nu)} G \end{aligned} \quad (3.19)$$

Der Kompressionsmodul  $K$  wird für  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  sehr groß. Wenn  $\text{SP}(\epsilon)$  bei einer isochoren Deformation dann nicht verschwindet, wird die Kompressionssteifigkeit eines Elementes oder einer Gruppe von Elementen sehr viel größer sein als die entsprechende Steifigkeit des Kontinuums.

Da die konstanten Verzerrungen im Element exakt erfaßt werden, kann die Versteifung nur von den ortsabhängigen Verzerrungsanteilen  $\epsilon_h$  verursacht werden. Der Beweis dieser Behauptung läßt sich durch die Betrachtung des zweiten Integrals in (3.20) erbringen. Berücksichtigt man, daß  $\text{SP}[\epsilon]$  die Summe aus einem konstanten Anteil  $\text{SP}[\epsilon_c]$  und einem ortsabhängigen Anteil  $\text{SP}[\epsilon_h]$  ist, so ergibt sich für das Integral der folgende Ausdruck.

$$\begin{aligned} \int_{V_e} (\text{SP}[\epsilon])^2 dV_e &= \int_{V_e} (\text{SP}[\epsilon_c])^2 dV_e + \int_{V_e} (\text{SP}[\epsilon_h])^2 dV_e + \\ &\quad 2 \text{SP}[\epsilon_c] \underbrace{\int_{V_e} \text{SP}[\epsilon_h] dV_e}_{\equiv 0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Der letzte Term in (3.20) ist identisch Null, da der Integrand eine lineare Funktion der natürlichen Ortsvariablen  $r$ ,  $s$  und  $t$  und das Integrationsgebiet ein Quader ist ( $\int_{V_e} (\bullet) dV_e = j_c \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\bullet) dr ds dt$ ).

$$\begin{aligned} \text{SP}[\epsilon_h] &= \frac{2}{a} (s \vec{h}_1 + t \vec{h}_2 + st \vec{h}_4) \circ \vec{u}_n + \frac{2}{b} (r \vec{h}_1 + t \vec{h}_3 + rt \vec{h}_4) \circ \vec{v}_n + \\ &\quad \frac{2}{c} (r \vec{h}_2 + s \vec{h}_3 + rs \vec{h}_4) \circ \vec{w}_n \end{aligned} \quad (3.21)$$



Der in  $\text{SP}[\epsilon_h]$  quadratische Term in (3.20) ist dagegen auch für Knotenverschiebungen, die das Elementvolumen nicht verändern, positiv. Obwohl keine Volumenänderung vorliegt, ist dann bei inkompressiblem Materialverhalten die Verformungsenergie  $\Pi_{vol}$  sehr viel größer als  $\Pi_{dev}$ :  $\Pi_{vol} \gg \Pi_{dev}$  für  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ . Beispiele für die Auswirkungen dieser unphysikalischen, rein numerisch bedingten Versteifung finden sich bereits bei *Naagtegal, Parks, Rice* [1974].

### 3.2.3 Unterdrückung der Versteifungseffekte

Die vorstehend geschilderten unerwünschten Versteifungsphänomene des 8-Knoten Verschiebungselementes können abgeschwächt oder vollkommen unterdrückt werden. Das Mittel hierbei sind die erweiterten Verzerrungen, die in Art (Normal- oder Scherverzerrung) und Anzahl darüber entscheiden, welche Versteifungen beseitigt werden. In den nachfolgenden Abschnitten werden inkompatible Verzerrungsfelder und die zugehörigen  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrizen einiger linearer EAS-Elemente vorgestellt und ihre Eigenschaften untersucht.

#### EAS/6S-Element

Innerhalb dieser Dissertation wurde ein Element entwickelt, das reine Biegung zumindest für  $\nu = 0$  mit nur sechs inkompatiblen Scherungen exakt beschreibt. Der Einfluß der Poissonzahl  $\nu$  auf die Biegesteifigkeit des Elements mit dem Namen **EAS/6S** ist jedoch sehr gering, was durch die Ergebnisse der numerischen Beispiele bestätigt wird (siehe Abschnitt 3.6), so daß dieses Element auch für Werte von  $0 < \nu < \frac{1}{2}$  trotz einer geringen Versteifung praktisch gut einsetzbar ist. Der Name für dieses Element soll zum Ausdruck bringen, daß die Verzerrungen des konventionellen Verschiebungselementes um 6 Scherungsterme erweitert werden. Als Resultat wird an dieser Stelle die zugehörige  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix angegeben.

$$\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1^T + t \vec{\mathbf{h}}_2^T + st \vec{\mathbf{h}}_4^T) & \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1^T + t \vec{\mathbf{h}}_3^T + rt \vec{\mathbf{h}}_4^T) & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + rs \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \frac{2}{b} (t \vec{\mathbf{h}}_3 + rt \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{a} (t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} (s \vec{\mathbf{h}}_3 + rs \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + rs \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + rt \vec{\mathbf{h}}_4)^T \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Der zum vorgestellten Element zugehörige Vektor der inkompatiblen Scherungen  $\vec{\epsilon}_{6,s}^i$  ist abhängig von den sechs Freiwerten  $\varphi_1 \dots \varphi_6$ , die beim Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix durch die statische Kondensation eliminiert werden.

$$\vec{\epsilon}_{6,s}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \varphi_1 + s \varphi_2 \\ r \varphi_3 + t \varphi_4 \\ s \varphi_5 + t \varphi_6 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Damit sind Scherungen und Normalverzerrungen in den linearen Termen vollständig entkoppelt. Die Biegesteifigkeit ist noch von  $\nu$  abhängig, weil die Normalverzerrungen der Verschiebungsformulierung von den inkompatiblen Scherungen in keinsten Weise beeinflusst werden. Aus diesem Grund ist die volumetrische Versteifung im **EAS/6S**-Element für  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  weiterhin vorhanden.

Die Eigenwerte der Biegeformen des **EAS/6S**-Elementes sind für  $\nu = 0$  exakt. Mit dem 6 Parameter Element modellierte schlanke Strukturen, die auf Biegung beansprucht werden, zeigen im Gegensatz zum Verschiebungselement auch für  $\nu > 0$  nur eine geringe Versteifung.

Für die Eigenwerte bedeutet das:

- i) Biegung in x-Richtung :  $e_1 = e_2 = \frac{E}{6} \frac{b}{a} \frac{c}{a} \xrightarrow{a \gg b, c} 0$
- ii) Biegung in y-Richtung :  $e_3 = e_4 = \frac{E}{6} \frac{a}{b} \frac{c}{b} \xrightarrow{b \gg a, c} 0$
- iii) Biegung in z-Richtung :  $e_5 = e_6 = \frac{E}{6} \frac{a}{c} \frac{b}{c} \xrightarrow{c \gg a, b} 0$

Manchmal kann es durchaus erwünscht sein, eine Platte oder zumindest Teile davon mit Volumenelementen zu diskretisieren. Das **EAS/6S**-Element ist dafür aber ungeeignet. Numerische Untersuchungen haben ergeben, daß ein versteifungsfreies Deformationsverhalten nur für **vollständige** Entkopplung von Normalverzerrungen und Scherungen möglich ist.

### EAS/12S-Element

Eine vollständige Entkopplung zwischen Normalverzerrungen und Scherungen ist nur mit zwölf inkompatiblen Scherungstermen möglich. Die  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix dieses sog. **EAS/12S**-Elements ist durch den folgenden Ausdruck gegeben.

$$\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(12)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{h}_1 + t \vec{h}_2 + st \vec{h}_4)^T & \vec{o}^T & \vec{o}^T \\ \vec{o}^T & \frac{2}{b} (r \vec{h}_1 + t \vec{h}_3 + rt \vec{h}_4)^T & \vec{o}^T \\ \vec{o}^T & \vec{o}^T & \frac{2}{c} (r \vec{h}_2 + s \vec{h}_3 + rs \vec{h}_4)^T \\ \frac{2}{b} t \vec{h}_3^T & \frac{2}{a} t \vec{h}_2^T & \vec{o}^T \\ \frac{2}{c} s \vec{h}_3^T & \vec{o}^T & \frac{2}{a} s \vec{h}_1^T \\ \vec{o}^T & \frac{2}{c} r \vec{h}_2^T & \frac{2}{b} r \vec{h}_1^T \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Die 6 inkompatiblen linearen Scherungen von **EAS/6S** werden bei **EAS/12S** um 6 bilineare Terme erweitert. Insgesamt ergibt sich ein von 12 inneren Freiheitsgraden abhängiger Vektor

$$\vec{\epsilon}_{12,s}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \varphi_1 + s \varphi_2 + rt \varphi_3 + st \varphi_4 \\ r \varphi_5 + t \varphi_6 + rs \varphi_7 + st \varphi_8 \\ s \varphi_9 + t \varphi_{10} + rs \varphi_{11} + rt \varphi_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Wie man am Fehlen der bilinearen Terme  $rs$ ,  $rt$  und  $st$  in den Scherungstermen in (3.24) erkennt, sind die in der Verschiebungsmethode vorhandenen Kopplungen zwischen Normal- und Schubverzerrungen vollkommen beseitigt. Die Folge ist eine geringere Steifigkeit dieses Elementes verglichen mit dem **EAS/6S**-Element in komplexeren Lastfällen als reiner Biegung – Belastungen, die etwa bei der Beanspruchung von Platten durch Einzelkräfte oder durch gleichförmig verteilte Lasten auftreten. Ein Nachteil von **EAS/12S** besteht darin, daß die Normalverzerrungen des Verschiebungselementes nicht verändert werden. Wie das **EAS/6S**-Element besitzt auch das **EAS/12S**-Element die volumetrische Versteifung für  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ . Eine dünne Platte kann deshalb nicht bei  $\nu > 0$  mit nur einer einzigen Schicht von **EAS/12S**-Elementen über die Plattendicke modelliert werden.

#### Anmerkung:

Ein Element mit ausschließlich konstanten Scherungen könnte mit nur drei weiteren (also insgesamt 15) inkompatiblen Verzerrungstermen konstruiert werden. Das Problem dabei ist, daß die zugehörige  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix drei Nullzeilen enthält und als Konsequenz die Elementsteifigkeitsmatrix drei Null-Energiemoden oder „hour-glass“ Moden besitzt. Dieser Rangabfall muß dann durch Addition einer Stabilisierungsmatrix kompensiert werden. Es

ist daher zu empfehlen, auf eine solche Modifikation der  $\mathbf{B}_h$ -Matrix des Verschiebungselementes zu verzichten.

**EAS/6N-Element**

Die volumetrische Versteifung kann nur durch Modifikation der Normalverzerrungen des Verschiebungselementes beseitigt werden. Ziel dieser Modifikation ist, die Bedingung

$$\text{SP}(\epsilon_h) = \epsilon_{x,h} + \epsilon_{y,h} + \epsilon_{z,h} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \rightarrow 1/2$$

**punktweise** zu erfüllen. Eine Möglichkeit dieses Ziel zu erreichen, besteht darin, die linearen Terme in den Normalverzerrungen zu vervollständigen und die bilinearen Terme zu eliminieren. Die drei Normalverzerrungen sind dann lineare Polynome in  $r$ ,  $s$  und  $t$ . Mit dem inkompatiblen Verzerrungsfeld

$$\vec{\epsilon}_{6,n}^i = \begin{pmatrix} r \varphi_1 + s t \varphi_2 \\ s \varphi_3 + r t \varphi_4 \\ t \varphi_5 + r s \varphi_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

das von sechs Parametern  $\varphi_1 \dots \varphi_6$  abhängt, kann ein Element ohne volumetrische Versteifung (aber mit Biegeversteifung) mit Hilfe der EAS-Methode erzeugt werden. Die statische Kondensation der Freiwerte ergibt für einen Quader die folgende  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix:

$$\bar{\mathbf{B}}_{h,n}^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} \frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_1^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} \frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_2^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} \frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_1^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} \frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_3^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} \frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_2^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} \frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_3^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3)^T \\ \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Auffallend ist in (3.27) die Veränderung der Besetzungsstruktur gegenüber der  $\mathbf{B}_h$ -Matrix (3.17). Bei **EAS/6S** und **EAS/12S** werden nur einzelne Terme von (3.17) eliminiert. Ebenfalls neu ist, daß die  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix nun Werkstoffparameter enthält und somit keine

rein kinematische Größe mehr darstellt.

Es muß nun noch bewiesen werden, daß der ortsabhängige Anteil der Spur von  $\epsilon$  für  $\nu \rightarrow 1/2$  verschwindet. Dazu wird  $\bar{\mathbf{B}}_{h,n}^{(6)}$  auf den Vektor der Knotenverschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_e^T = (\vec{\mathbf{u}}_n, \vec{\mathbf{v}}_n, \vec{\mathbf{w}}_n)$  angewendet, und nachdem dadurch der Verzerrungsvektor berechnet wurde, können die drei Normalverzerrungen addiert werden.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{x,h} + \epsilon_{y,h} + \epsilon_{z,h} &= s \frac{2}{a} \left[ \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right] (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + t \frac{2}{a} \left[ \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right] (\vec{\mathbf{h}}_2 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + \\
 &\quad r \frac{2}{b} \left[ \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right] (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + t \frac{2}{b} \left[ \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right] (\vec{\mathbf{h}}_3 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + \\
 &\quad r \frac{2}{c} \left[ \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right] (\vec{\mathbf{h}}_2 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) + s \frac{2}{c} \left[ \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right] (\vec{\mathbf{h}}_3 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) \\
 \\
 \epsilon_{x,h} + \epsilon_{y,h} + \epsilon_{z,h} &= \left[ s \frac{2}{a} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + t \frac{2}{a} (\vec{\mathbf{h}}_2 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + r \frac{2}{b} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + \right. \\
 &\quad \left. t \frac{2}{b} (\vec{\mathbf{h}}_3 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + r \frac{2}{c} (\vec{\mathbf{h}}_2 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) + s \frac{2}{c} (\vec{\mathbf{h}}_3 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) \right] \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu}
 \end{aligned}$$

Unabhängig vom Ort und den Knotenverschiebungen sorgt der Faktor  $(1 \Leftrightarrow 2\nu)/(1 \Leftrightarrow \nu)$  für die Einhaltung der Zwangsbedingung  $\epsilon_h = 0$  bei inkompressiblem Materialverhalten:

$$\frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \nu \rightarrow \frac{1}{2} \quad \bullet$$

### EAS/9N-Element

Die zweite Möglichkeit, die volumetrische Versteifung im Rahmen des EAS-Formalismus zu beseitigen, ist die Konstruktion des sog. **EAS/9N**-Elements. Es handelt sich dabei um ein Element mit inkompatiblen Normalverzerrungen, die von neun Parametern  $\varphi_1 \dots \varphi_9$  abhängen.

$$\vec{\epsilon}_{9,n}^i = \begin{pmatrix} r \varphi_1 + r s \varphi_2 + r t \varphi_3 \\ s \varphi_4 + r s \varphi_5 + s t \varphi_6 \\ t \varphi_7 + r t \varphi_8 + s t \varphi_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Die Bedingung für Versteifungsfreiheit bei inkompressiblem Material wird nun dadurch erreicht, daß die linearen **und** die bilinearen Terme in den Normalverzerrungen vervollständigt werden. Die resultierende  $\bar{\mathbf{B}}_{h,n}^{(9)}$ -Matrix besitzt dieselben Eigenschaften wie die  $\bar{\mathbf{B}}_{h,n}^{(6)}$ -Matrix des **EAS/6N**-Elementes.

$$\bar{\mathbf{B}}_{h,n}^{(9)} = \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} (\frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_1 + \nu r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} (\frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_2 + \nu r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} (\frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_1 + \nu st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} (\frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_3 + \nu r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} (\frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_2 + \nu st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} (\frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_3 + \nu r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \end{pmatrix}$$

Der Beweis, daß die Bedingung  $\text{SP}(\epsilon_h) = 0$  für  $\nu = 1/2$  erfüllt wird, verläuft analog zum Beweis bei **EAS/6N** und braucht deshalb nicht wiederholt zu werden.

**EAS/12-Element**

Die bisher vorgestellten Elemente beseitigen entweder nur die Biegeversteifung (wie die Elemente **EAS/6S** und **EAS/12S**) oder nur die volumetrische Versteifung (wie **EAS/6N** und **EAS/9N**). Ein in praktischen Simulationen einsetzbares Element sollte aber beide Arten von Versteifung zuverlässig unterdrücken. Dies kann durch Addition der inkompatiblen Verzerrungen der beiden verschiedenen Elementformulierungen **EAS/6S** und **EAS/6N** oder **EAS/12S** und **EAS/9N** erreicht werden.

Das Element, das die Eigenschaften von **EAS/6S** und **EAS/6N** kombiniert und mit **EAS/12** bezeichnet wird, wurde zuerst von *Simo et al.* [1993] im Zusammenhang mit großen Deformationen vorgestellt. Die zugehörige  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix für einen Quader und linear-isotropes Material ist durch den nachfolgenden Ausdruck gegeben.

$$\bar{\mathbf{B}}_h^{(12)} = \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} \frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_1^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} \frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_2^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} \frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_1^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} \frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_3^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} \frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_2^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} \frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_3^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3)^T \\ \frac{2}{b} (t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{a} (t \vec{\mathbf{h}}_2 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} (s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Die inkompatiblen Verzerrungen dieses EAS-Elementes

$$\epsilon_{12}^{(i)} = \epsilon_{6,s}^{(i)} + \epsilon_{6,n}^{(i)} \quad (3.32)$$

bewirken, daß keine Biegeversteifung auftritt und die Biegesteifigkeit unabhängig von  $\nu$  ist. Ein „locking“ bei der Aktivierung inhomogener Verzerrungen und inkompressiblem Werkstoffverhalten wie beim klassischen Verschiebungselement ist ebenfalls nicht vorhanden.

### EAS/21-Element

Die Kombination der Elemente **EAS/9N** und **EAS/12S** liefert das Element der EAS-Familie mit den besten Resultaten in numerischen Simulationen. Eine weitere Steigerung der Anzahl der „enhanced assumed strain“ Terme wirkt sich beim Quader und beim Parallelepiped nicht aus. Da mit Hexaedern allgemeiner Form gegenüber Parallelepipeden bekanntlich sehr viel schlechtere Ergebnisse erzielt werden, kann eine Erhöhung der Anzahl der  $\varphi_i$  über 21 hinaus auch für diese Elemente aus Effizienzgründen kaum empfohlen werden.

Die Addition der inkompatiblen Verzerrungen von **EAS/9N** und **EAS/12S**

$$\epsilon_{21}^i = \epsilon_{12,s}^i + \epsilon_{9,n}^i \quad (3.33)$$

vervollständigt die Polynome für die Normalverzerrungen in den linearen und bilinearen Termen und beseitigt die Kopplung mit den Scherungen. Das läßt sich an der resultierenden  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix erkennen.

$$\bar{\mathbf{B}}_h^{(21)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} (\frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_1 + \nu r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} (\frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_2 + \nu r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} (\frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_1 + \nu st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + rt \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} (\frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_3 + \nu r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} (\frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_2 + \nu st \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} (\frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_3 + \nu r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + rs \vec{\mathbf{h}}_4) \\ \frac{2}{b} t \vec{\mathbf{h}}_3^T & \frac{2}{a} t \vec{\mathbf{h}}_2^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} s \vec{\mathbf{h}}_3^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} s \vec{\mathbf{h}}_1^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} r \vec{\mathbf{h}}_2^T & \frac{2}{b} r \vec{\mathbf{h}}_1^T \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Eine Alternative zum **EAS/21**-Element, die Kombination von **EAS/12S** und **EAS/6N**, die aufgrund ihrer Effizienz durchaus attraktiv erscheinen könnte, muß verworfen werden. Sie führt zu einer  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix, die den Vektor  $\vec{\mathbf{h}}_4$  nicht enthält. Die Folge ist, daß die Steifigkeitsmatrix dieses Elementes einen Rangabfall gegenüber der Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes aufweist (mehr als sechs Null-Eigenwerte !). Dieser Rangabfall müßte wieder durch eine Stabilisierung kompensiert werden.

**TBW-Element**

Der Vollständigkeit wegen muß an dieser Stelle auch ein EAS-Element vorgestellt werden, das mit Hilfe von inkompatiblen Verschiebungen bereits von *Taylor, Beresford, Wilson* [1976] entwickelt wurde. Die 9 inkompatiblen Verschiebungsterme führen zu den neun Verzerrungstermen

$$\vec{\epsilon}_9^i = \begin{pmatrix} r \varphi_1 \\ s \varphi_2 \\ t \varphi_3 \\ r \varphi_4 + s \varphi_5 \\ r \varphi_6 + t \varphi_7 \\ s \varphi_8 + t \varphi_9 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

An der zugehörigen  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix kann man erkennen, daß die Kopplung zwischen Scherungen und Normalverzerrungen in den linearen Termen aufgehoben ist und das Element somit die Biegeeigenschaften von **EAS/6S** besitzt.



$$\bar{\mathbf{B}}_h^{(9)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_2 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} \frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_1^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} \frac{\nu}{1-\nu} r \vec{\mathbf{h}}_2^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} \frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_1^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \Leftrightarrow \frac{2}{c} \frac{\nu}{1-\nu} s \vec{\mathbf{h}}_3^T \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a} \frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_2^T & \Leftrightarrow \frac{2}{b} \frac{\nu}{1-\nu} t \vec{\mathbf{h}}_3^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \frac{2}{b} (t \vec{\mathbf{h}}_3 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{a} (t \vec{\mathbf{h}}_2 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T \\ \frac{2}{c} (s \vec{\mathbf{h}}_3 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{a} (s \vec{\mathbf{h}}_1 + s t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \\ \vec{\mathbf{o}}^T & \frac{2}{c} (r \vec{\mathbf{h}}_2 + r s \vec{\mathbf{h}}_4)^T & \frac{2}{b} (r \vec{\mathbf{h}}_1 + r t \vec{\mathbf{h}}_4)^T \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Die volumetrische Versteifung ist aber nicht vollständig beseitigt. Nur wenn die  $\vec{\mathbf{h}}_4$ -Terme nicht aktiviert werden, ist die Bedingung  $\text{SP}(\epsilon_h) = 0$  bei  $\nu = 1/2$  erfüllt. Anderenfalls ist  $\text{SP}(\epsilon_h)$  eine bilineare Funktion der Ortskoordinaten, die nur am Elementmittelpunkt verschwindet, d.h.:

$$\begin{aligned} \text{SP}(\epsilon_h) &= \left( \frac{1 \Leftrightarrow 2\nu}{1 \Leftrightarrow \nu} \right) \left[ s \frac{2}{a} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + t \frac{2}{a} (\vec{\mathbf{h}}_2 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + r \frac{2}{b} (\vec{\mathbf{h}}_1 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + \right. \\ &\quad \left. t \frac{2}{b} (\vec{\mathbf{h}}_3 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + r \frac{2}{c} (\vec{\mathbf{h}}_2 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) + s \frac{2}{c} (\vec{\mathbf{h}}_3 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) \right] \\ &\quad + s t (\vec{\mathbf{h}}_4 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + r t (\vec{\mathbf{h}}_4 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + r s (\vec{\mathbf{h}}_4 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) \end{aligned}$$

$$\text{SP}(\epsilon_h) \rightarrow s t (\vec{\mathbf{h}}_4 \circ \vec{\mathbf{u}}_n) + r t (\vec{\mathbf{h}}_4 \circ \vec{\mathbf{v}}_n) + r s (\vec{\mathbf{h}}_4 \circ \vec{\mathbf{w}}_n) \quad \text{für} \quad \nu \rightarrow \frac{1}{2}$$

### 3.3 Parallelepipede

Der nächste Schritt auf dem Weg zu einer effizienten und zuverlässigen linearen Elementformulierung besteht in der Erweiterung der im vorigen Abschnitt vorgestellten EAS-Elemente auf beliebig zur globalen Basis orientierte Quader und Parallelepipede. Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  dieser Elemente ist wie beim achsenparallelen Quader konstant, aber vollbesetzt. Die Folge ist, daß der Aufwand zur Berechnung der  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrizen sehr viel größer ist als für die Elemente in Abschnitt 3.2. Die  $\mathbf{H}$ -Matrix ist keine Diagonalmatrix mehr und die für die Eliminierung der EAS-Parameter erforderliche Invertierung ist mit einer großen Anzahl von Rechenoperationen verbunden. Es ist aber stets möglich,

eine blockdiagonale  $\mathbf{H}$ -Matrix zu erhalten. Erforderlich hierfür ist nur die Verwendung einer geeigneten (s.u.) Interpolationsmatrix  $\mathbf{G}$  und die Berücksichtigung der Homogenität von Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  und Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}$  im Element. Statt eine  $6 \times 6$  Matrix für das Element **EAS/6S** zu invertieren, müssen dann nur 3 Matrizen der Dimension  $2 \times 2$  invertiert werden. Diese Blockdiagonalgestalt von  $\mathbf{H}$  ist aber ausschließlich bei konstanter Werkstoffmatrix im Element gegeben! Die Eigenschaften bzgl. des Deformationsverhaltens der EAS-Quaderelemente bleiben beim Übergang zu einem Element mit Parallelepipedgestalt erhalten. Aufgrund der konstanten Jacobi-Matrix sind kompatible und inkompatible Verzerrungen weiterhin aufeinander abgestimmt. Art und Anzahl der EAS-Interpolationsterme brauchen deshalb nicht verändert zu werden, um die für einen achsenparallelen Quader erreichten Elementeigenschaften zu bewahren. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf das **EAS/6S**-Element. Die Vorgehensweise bei der Herleitung der  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrizen ist für die anderen Elemente analog und bietet keine neuen Erkenntnisse über die EAS-Methode.

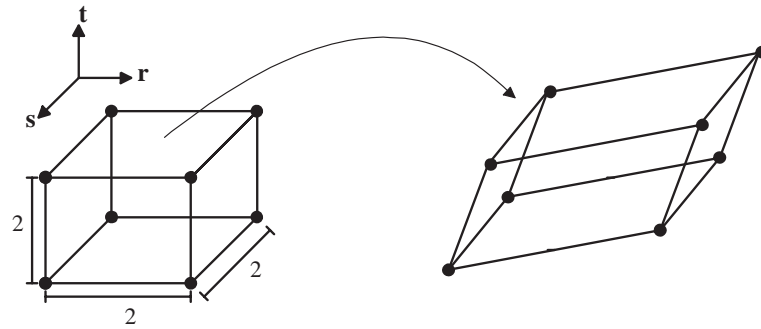


Abb. 2.2 : Das Parallelepiped

Der Schlüssel zur Erlangung der Blockdiagonalgestalt der  $\mathbf{H}$ -Matrix ist die Anordnung von Spalten der Interpolationsmatrix  $\mathbf{G}$ , die identische Polynomterme enthalten, nebeneinander.

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}_c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & t \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} r \begin{bmatrix} T_c^{14} & T_c^{15} \\ T_c^{24} & T_c^{25} \\ T_c^{34} & T_c^{35} \\ T_c^{44} & T_c^{45} \\ T_c^{54} & T_c^{55} \\ T_c^{64} & T_c^{65} \end{bmatrix} & s \begin{bmatrix} T_c^{14} & T_c^{16} \\ T_c^{24} & T_c^{26} \\ T_c^{34} & T_c^{36} \\ T_c^{44} & T_c^{46} \\ T_c^{54} & T_c^{56} \\ T_c^{64} & T_c^{66} \end{bmatrix} & t \begin{bmatrix} T_c^{15} & T_c^{16} \\ T_c^{25} & T_c^{26} \\ T_c^{35} & T_c^{36} \\ T_c^{45} & T_c^{46} \\ T_c^{55} & T_c^{56} \\ T_c^{65} & T_c^{66} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{T}_r} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{T}_s} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{T}_t}$

Nach Einführung der Matrizen  $\mathbf{T}_r, \mathbf{T}_s, \mathbf{T}_t \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$  und  $\mathbf{G}_r, \mathbf{G}_s, \mathbf{G}_t \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$  kann  $\mathbf{G}$  in kompakter Weise dargestellt werden.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} r \mathbf{T}_r & s \mathbf{T}_s & t \mathbf{T}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r & \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_t \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Betrachtet man nun die Definition der zu invertierenden  $\mathbf{H}$ -Matrix

$$\mathbf{H} := \int_{V_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e \quad ,$$

setzt den obigen Ausdruck (3.38) für  $\mathbf{G}$  ein

$$\mathbf{H} = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r^T \\ \mathbf{G}_s^T \\ \mathbf{G}_t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{G}_r & \mathbf{C} \mathbf{G}_s & \mathbf{C} \mathbf{G}_t \end{bmatrix} dV_e \quad (3.40)$$

und berücksichtigt die Konstanz der Werkstoffmatrix  $\mathbf{C}$ , erhält man eine Matrix mit Blockstruktur.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_r^T \mathbf{C} \mathbf{T}_r \int_{V_e} r r dV_e & \mathbf{T}_r^T \mathbf{C} \mathbf{T}_s \int_{V_e} r s dV_e & \mathbf{T}_r^T \mathbf{C} \mathbf{T}_t \int_{V_e} r t dV_e \\ \mathbf{T}_s^T \mathbf{C} \mathbf{T}_r \int_{V_e} s r dV_e & \mathbf{T}_s^T \mathbf{C} \mathbf{T}_s \int_{V_e} s s dV_e & \mathbf{T}_s^T \mathbf{C} \mathbf{T}_t \int_{V_e} s t dV_e \\ \mathbf{T}_t^T \mathbf{C} \mathbf{T}_r \int_{V_e} t r dV_e & \mathbf{T}_t^T \mathbf{C} \mathbf{T}_s \int_{V_e} t s dV_e & \mathbf{T}_t^T \mathbf{C} \mathbf{T}_t \int_{V_e} t t dV_e \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Die Blockdiagonalgestalt ergibt sich aus der Tatsache, daß die Integrale über die bilinearen Polynome wie  $r s$  bei konstanter Jacobi-Determinante  $j_c$  verschwinden.

$$\begin{aligned}
 \int_{V_e} r s dV_e &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r s j_c dr ds dt \\
 &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r t j_c dr ds dt \\
 &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} s t j_c dr ds dt = 0
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Die Integrale über die quadratischen Terme können analytisch berechnet werden:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r^2 j_c dr ds dt = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} s^2 j_c dr ds dt = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} t^2 j_c dr ds dt = \frac{8}{3} j_c \tag{3.43}$$

Damit bekommt die  $\mathbf{H}$ -Matrix ihre endgültige blockdiagonale Form. Die Abkürzungen für die Diagonalmatrizen  $\mathbf{H}_r$ ,  $\mathbf{H}_s$  und  $\mathbf{H}_t \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  dienen nur der Übersichtlichkeit bei der Herleitung der  $\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)}$ -Matrix.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_r^T \mathbf{C} \mathbf{T}_r \frac{8}{3} j_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_s^T \mathbf{C} \mathbf{T}_s \frac{8}{3} j_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_t^T \mathbf{C} \mathbf{T}_t \frac{8}{3} j_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_t \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

An dieser Stelle muß darauf hingewiesen werden, daß das obige Resultat für die Matrix  $\mathbf{H}$  unter der Annahme einer im Element konstanten Werkstoffmatrix gewonnen wurde. Die Besetzungsstruktur der  $\mathbf{C}$ -Matrix hat keinen Einfluß auf das Ergebnis. Daher braucht das Material auch nicht isotrop zu sein.

Die  $2 \times 2$  Blockmatrizen können unabhängig voneinander invertiert werden. Die explizite Aufstellung der  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrix

$$\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)} = \mathbf{B}_h \Leftrightarrow \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} \tag{3.45}$$

ist deshalb ohne großen Aufwand möglich. Einsetzen des Ausdrucks (3.39) für die Matrix  $\mathbf{G}$  in die Kopplungsmatrix  $\mathbf{L}$  bzw.  $\mathbf{L}^T$  ergibt

$$\mathbf{L}^T = \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{C} \mathbf{G} dV_e = \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r & \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_t \end{bmatrix} dV_e \quad . \tag{3.46}$$

Mit Hilfe der folgenden Definitionen für die drei Matrizen  $\mathbf{L}_r$ ,  $\mathbf{L}_s$  und  $\mathbf{L}_t$ , aus denen  $\mathbf{L}$  besteht,

$$\mathbf{L}_q := \int_{V_e} \mathbf{G}_q^T \mathbf{C} \mathbf{B}_h dV_e = \mathbf{T}_q^T \mathbf{C} \int_{V_e} q \mathbf{B}_h dV_e \in \mathbb{R}^{2 \times 24} \quad q = r, s, t \quad (3.47)$$

kann  $\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)}$  als Summe von vier Termen dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)} &= \mathbf{B}_h \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r & \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r^{-1} \mathbf{L}_r \\ \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{L}_s \\ \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{L}_t \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B}_h \Leftrightarrow \mathbf{G}_r \mathbf{H}_r^{-1} \mathbf{L}_r \Leftrightarrow \mathbf{G}_s \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{L}_s \Leftrightarrow \mathbf{G}_t \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{L}_t \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nach Einsetzen der Definitionen von  $\mathbf{L}_r$ ,  $\mathbf{L}_s$  und  $\mathbf{L}_t$  und  $\mathbf{G}_r$ ,  $\mathbf{G}_s$ ,  $\mathbf{G}_t$  ergibt sich der endgültige Ausdruck für  $\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)} &= \mathbf{B}_h \Leftrightarrow r \mathbf{T}_r \mathbf{H}_r^{-1} \mathbf{T}_r^T \mathbf{C} \int_{V_e} \mathbf{B}_h r dV_e \\ &\Leftrightarrow s \mathbf{T}_s \mathbf{H}_s^{-1} \mathbf{T}_s^T \mathbf{C} \int_{V_e} \mathbf{B}_h s dV_e \\ &\Leftrightarrow t \mathbf{T}_t \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{T}_t^T \mathbf{C} \int_{V_e} \mathbf{B}_h t dV_e \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)} &= \mathbf{B}_h \Leftrightarrow r \bar{\mathbf{B}}_r \Leftrightarrow s \bar{\mathbf{B}}_s \Leftrightarrow t \bar{\mathbf{B}}_t \\ \text{mit } \bar{\mathbf{B}}_q &:= \mathbf{T}_q \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T}_q^T \mathbf{C} \int_{V_e} \mathbf{B}_h q dV_e \quad (q = r, s, t) \end{aligned}$$

(3.50)

Eine weitere Reduzierung des Berechnungsaufwands kann durch Verzicht auf die im vorliegenden Fall nicht erforderliche numerische Integration der drei Matrizen vom Typ  $\int_{V_e} \mathbf{B}_h q dV_e$  ( $q = r, s, t$ ) erreicht werden. Diese Matrizen können ohne Probleme analytisch integriert werden, da die Integranden einfache Polynome in den natürlichen Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$  sind. Auf diese Tatsache wurde bereits von *Belytschko, Wang* [1987] bei der Formulierung eines sehr effizienten dreidimensionalen 12-Parameter Hellinger-Reissner Elementes hingewiesen. Als Beispiel wird an dieser Stelle der Ausdruck für  $\int_{V_e} \mathbf{B}_h r dV_e$

wiedergegeben. Die beiden anderen Matrizen sind vollkommen analog aufgebaut.

$$\int_{V_e} \mathbf{B}_h^T r dV_e = \frac{8}{3} j_c \begin{pmatrix} j_{12}^{-1} \vec{h}_1 + j_{13}^{-1} \vec{h}_2 & \vec{o}^T & \vec{o}^T \\ \vec{o}^T & j_{22}^{-1} \vec{h}_1 + j_{23}^{-1} \vec{h}_2 & \vec{o}^T \\ \vec{o}^T & \vec{o}^T & j_{32}^{-1} \vec{h}_1 + j_{33}^{-1} \vec{h}_2 \\ j_{22}^{-1} \vec{h}_1 + j_{23}^{-1} \vec{h}_2 & j_{12}^{-1} \vec{h}_1 + j_{13}^{-1} \vec{h}_2 & \vec{o}^T \\ j_{32}^{-1} \vec{h}_1 + j_{33}^{-1} \vec{h}_2 & \vec{o}^T & j_{12}^{-1} \vec{h}_1 + j_{13}^{-1} \vec{h}_2 \\ \vec{o}^T & j_{32}^{-1} \vec{h}_1 + j_{33}^{-1} \vec{h}_2 & j_{22}^{-1} \vec{h}_1 + j_{23}^{-1} \vec{h}_2 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Die  $j_{kl}^{-1}$  in (3.51) sind die am Elementmittelpunkt berechneten Komponenten der inversen Jacobi-Matrix.

Trotz der in diesem Abschnitt geschilderten Schritte, die Effizienz der EAS-Formulierung zu steigern, ist die Anzahl der Operationen bei der Berechnung von  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix und Steifigkeitsmatrix sehr viel größer als beim Verschiebungselement oder beim EAS-Quaderelement. Die  $6 \times 24$  Matrizen  $\mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{B}_s$  und  $\mathbf{B}_t$  und daher auch  $\bar{\mathbf{B}}_{h,s}^{(6)}$  sind vollständig besetzt. Die schwache Besetzung der  $\mathbf{B}_h$ -Matrix der Verschiebungsformulierung geht auf diese Weise vollkommen verloren. Dementsprechend verlangt die Berechnung der Steifigkeitsmatrix mehr Operationen und nimmt mehr Rechenzeit in Anspruch.

Der Vorteil der EAS-Formulierung besteht darin, daß die Eigenschaften der EAS-Elemente beim Übergang von Quadern zu Parallelepipeden erhalten bleiben. Verantwortlich für dieses günstige Verhalten ist die Konstruktionsvorschrift (3.7) für die Interpolationsmatrix der inkompatiblen Verzerrungen. Die Formulierung ist a priori invariant bzgl. Drehungen und bzgl. homogener Verformungen der Quadergestalt. Um hingegen nur die Drehinvarianz zu sichern, ist in manchen  $\bar{\mathbf{B}}$ -Elementen (z. B. *Belytschko*, *Bindeman* [1993]) explizit die Definition einer lokalen orthogonalen Basis erforderlich. Bzgl. dieser lokalen Basis werden die Verzerrungen und die Steifigkeitsmatrix berechnet und anschließend in die globale Basis transformiert. Der Aufwand bei diesem Vorgehen ist beträchtlich. Abschließend muß noch erwähnt werden, daß für die Elemente **EAS/12S**, **EAS/12**, **EAS/9** und **EAS/21** der Aufwand gegenüber **EAS/6S** bei Parallelepipeden stark zunimmt. So erfordert die Berechnung der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix von **EAS/21** die Invertierung von drei  $4 \times 4$  und drei  $3 \times 3$  Matrizen.

### 3.4 Hexaeder mit beliebiger Geometrie

Elemente, die weder die Gestalt eines Quaders noch die eines Parallelepipeds besitzen, sind schwierig zu untersuchen. Die Jacobi-Matrix solcher Elemente ist ortsabhängig, und

als Folge davon ist die **H**-Matrix vollbesetzt. Die Berechnung der  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrizen erfordert je nach Elementtyp die Invertierung einer  $6 \times 6$  (**EAS/6S**) bis  $21 \times 21$  Matrix (**EAS/21**). Dieser enorme Anstieg des Berechnungsaufwands wird durch keine Qualitätssteigerung im Deformationsverhalten der EAS-Elemente ausgeglichen, da die Genauigkeit der Ergebnisse sich generell, unabhängig von der Elementformulierung, sehr rasch mit zunehmender Abweichung von der Quader- bzw. Parallelepipedgestalt vermindert. Ein weiterer Nachteil speziell der EAS-Methode besteht darin, daß kompatible und erweiterte inkompatible Verzerrungen für allgemeine Elementgeometrien nicht mehr aufeinander abgestimmt sind. Die Konsequenz davon ist das Auftreten von Versteifungseffekten, die für Parallelepipedelemente beseitigt werden können. Eine numerische Eigenwertanalyse verzerrter EAS-Elemente mit quasi-inkompressiblem Material läßt die volumetrische Versteifung deutlich erkennen (siehe Tabelle 1.2 in Abschnitt 3.6). Der Grund dafür liegt in der Transformationsvorschrift, mit der sich die inkompatiblen Verzerrungskomponenten  $\epsilon_{ij}^{(i)}$  bzgl. der globalen kartesischen Basis aus den inkompatiblen kovarianten Verzerrungskomponenten  $e_{ij}^{(i)}$  bzgl. der lokalen kontravarianten Basis berechnen. Diese Transformation erfolgt nicht punktweise, sondern nur am Elementmittelpunkt, d.h. die Transformationsmatrix wird nur am Elementmittelpunkt ausgewertet. Das entspricht einem Wechsel von einer schiefwinkligen ortsunabhängigen Basis zu einer kartesischen Basis.

$$\epsilon_{kl}^{(i)} = \frac{j_c}{j} \left[ \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \right]_c e_{ij}^{(i)} \left[ \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \right]_c = \frac{j_c}{j} [j_{ki}^{-1}]_c e_{ij}^{(i)} [j_{lj}^{-1}]_c \quad (3.52)$$

In (3.52) sind die  $j_{ki}^{-1}$  ( $i, k=1..3$ ) die Komponenten der inversen Jacobi-Matrix und der Index  $c$  bedeutet, daß die entsprechende Funktion am Elementmittelpunkt ausgewertet wird. Der Quotient  $j_c/j$  aus der konstanten ( $j_c$ ) und der ortsabhängigen ( $j$ ) Jacobi-Determinante ist für das Transformationsverhalten unwesentlich. Dieser Faktor stellt nur sicher, daß der sog. „Patch-Test“ erfüllt wird.

Gleichung (3.52) kann übersichtlicher in Matrixform dargestellt werden. Hierzu werden die kartesischen Komponenten in der Matrix  $\mathbf{E}^{(i)}$  und die kovarianten Komponenten in der Matrix  $\mathbf{e}^{(i)}$  zusammengefaßt.

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{j_c}{j} [\mathbf{J}^{-1}]_c \mathbf{e}^{(i)} [\mathbf{J}^{-T}]_c \quad (3.53)$$

Der Verschiebungsgradient bzw. seine Transponierte, aus dem der kompatible Verzerrungstensor gebildet wird, kann sowohl in Komponenten bzgl. der globalen kartesischen als auch einer lokalen, gemischt kartesisch-kontravarianten Basis dargestellt werden.

$$(\nabla \otimes \vec{\mathbf{u}})^T = \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial u^i}{\partial \xi^l} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{g}}^l \quad (3.54)$$

oder

$$(\nabla \otimes \vec{u})^T = D_{ik} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k = d_{il} \vec{e}_i \otimes \vec{g}^l \quad (3.55)$$

Die kontravarianten Basisvektoren in (3.54) besitzen die folgende Abhängigkeit von den kartesischen Basisvektoren.

$$\vec{g}^l = \frac{\partial \xi^l}{\partial x_k} \vec{e}_k = j_{kl}^{-1} \vec{e}_k \quad (3.56)$$

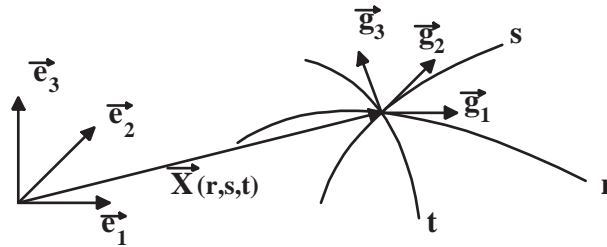


Abb. 2.3 : Die kovariante Basis

Die Matrix  $\mathbf{d}$ , die die gemischten Komponenten enthält, wird mittels der inversen Jacobi-Matrix in die Matrix  $\mathbf{D}$ , die die kartesischen Komponenten enthält, transformiert.

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{J}^{-T} \quad (3.57)$$

In der ursprünglichen Formulierung von *Simo, Rifai* [1990] wurden die Komponenten des transponierten Verschiebungsgradienten bzgl. einer gemischten kartesisch-kontravarianten Basis mittels der inversen Jacobi-Matrix **punktweise** in Komponenten bzgl. der kartesischen Basis transformiert. Die EAS-Interpolationsfunktionen werden in der kontravarianten Basis ausgewählt und dann nach (3.52) oder (3.53) in die kartesische Basis überführt. Dieses unterschiedliche Transformationsverhalten führt zwangsläufig dazu, daß die Komponenten der beiden Tensoren in der kartesischen Basis nicht mehr im Hinblick auf die Beseitigung der Versteifungen des Verschiebungsgradienten aufeinander abgestimmt sind. *Simo et al.* [1993] schlugen aus diesem Grund eine Transformationsvorschrift für die ortsabhängigen Komponenten des Verschiebungsgradienten vor, die sich an (3.52) orientiert.

$$\mathbf{D} = \frac{j_c}{j} \mathbf{d} [\mathbf{J}^{-T}]_c \quad (3.58)$$

Mit (3.58) kann die durch die Hexaedergeometrie verursachte Versteifung überwunden werden, was durch die Eigenwertuntersuchung in dem Artikel von *Simo, Armero, Taylor*



[1993] bestätigt wird. Diese Vorgehensweise hat aber die unerwünschte Konsequenz, daß das Element den „Patch-Test“ nicht exakt erfüllen kann und daher bei Netzverfeinerung Konvergenzprobleme auftreten können. Mit dieser Methode ist auch keine oder nur eine sehr geringe Effizienzsteigerung, verglichen mit der ursprünglichen Methode von *Simo, Rifai* [1990], verbunden. Es sei zudem bemerkt, daß die  $\mathbf{H}$ -Matrix allgemeiner Hexaeder selbst für eine homogene Werkstoffmatrix vollbesetzt ist, unabhängig ob (3.58) oder (3.57) benutzt wird.

### 3.5 Eine modifizierte EAS-Formulierung

Die hauptsächliche Ursache für den großen Bedarf an Rechenzeit, der für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix bzw. der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix benötigt wird, ist die statische Kondensation der EAS-Parameter. Um den Aufwand, der mit der Elimination der EAS-Freiwerte auf Elementebene verbunden ist, bei Hexaedern mit beliebiger Gestalt zu reduzieren, reicht eine Modifikation der  $\mathbf{H}$ -Matrix alleine nicht aus. Dagegen führt die Vorgehensweise, eine blockdiagonale oder sogar diagonale  $\mathbf{H}$ -Matrix bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix zu verwenden, bei Hellinger-Reissner (HR) Elementen mit unabhängigen Ansatzfunktionen für die Spannungen zu einer effizienten und zuverlässigen Elementformulierung. Varianten dieses Verfahrens für HR-Elemente wurden von *Sze* [1990] und *Belytschko, Wang* [1987] beschrieben.

Die Grundidee bei der Entwicklung eines effizienten und genauen linearen EAS-Elements besteht darin, daß die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{e,mod}$  additiv zusammengesetzt wird aus einer Matrix  $\mathbf{K}_{conv}$ , die die Konvergenz sichert, und einer Matrix  $\mathbf{K}_{stab}$ , die die Stabilität garantiert und die Versteifungen der Verschiebungsmethode unterdrückt.

$$\mathbf{K}_{e,mod} = \mathbf{K}_{conv} + \mathbf{K}_{stab} \quad (3.59)$$

Die Aufstellung der Stabilisierungsmatrix  $\mathbf{K}_{stab}$  kann systematisch mit Hilfe der EAS-Methode für Parallelepipede erfolgen. Die Interpolationsmatrix  $\mathbf{B}_h$  der ortsabhängigen kompatiblen Verzerrungen, die Interpolationsmatrix  $\mathbf{G}$  der erweiterten inkompatiblen Verzerrungen und die Integrationsvorschrift müssen für eine effiziente Formulierung so verändert werden, daß die resultierende  $\mathbf{H}_{mod}$ -Matrix Blockdiagonalgestalt besitzt. Weiter müssen die modifizierten Matrizen  $\mathbf{B}_{h,mod}$  und  $\mathbf{G}_{mod}$ , mit denen die Stabilisierungsmatrix  $\mathbf{K}_{stab}$  berechnet wird, aufeinander abgestimmt sein. Anderenfalls würden die in Abschnitt 3.4 beschriebenen Versteifungen, die ausschließlich durch die Abweichung der Elementgeometrie von der Parallelepipedgestalt bedingt sind, sich nachteilig auf das Verformungsverhalten des Elementes auswirken.

$$\mathbf{K}_{stab} = \int_{\bar{\mathbf{V}}_e} \left[ \bar{\mathbf{B}}_{h,mod}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}_{h,mod} \right] d\bar{\mathbf{V}}_e \quad (3.60)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{h,mod} = \mathbf{B}_{h,mod} \Leftrightarrow \mathbf{L}_{mod}^T \mathbf{H}_{mod}^{-1} \mathbf{L}_{mod} \quad (3.61)$$

Die Größe  $\bar{V}_e$  ist nicht das durch die Knotenkoordinaten festgelegte Elementvolumen  $V_e$ . Es handelt sich bei  $\bar{V}_e$  um ein fiktives Volumen, das nur zur Konstruktion von  $\mathbf{K}_{stab}$  bzw.  $\bar{\mathbf{B}}_{h,mod}$  benutzt wird. Die Matrizen  $\mathbf{L}_{mod}$  und  $\mathbf{H}_{mod}$  sind in Gleichung (3.62) definiert.

$$\mathbf{L}_{mod} := \int_{\bar{V}_e} \mathbf{G}_{mod} \mathbf{C} \mathbf{B}_{h,mod}^T d\bar{V}_e \quad , \quad \mathbf{H}_{mod} := \int_{\bar{V}_e} \mathbf{G}_{mod}^T \mathbf{C} \mathbf{G}_{mod} d\bar{V}_e \quad (3.62)$$

Als Lösung, die die obigen Forderungen bzgl. Effizienz und Zuverlässigkeit erfüllt, bietet sich daher an, für die Berechnung von  $\bar{\mathbf{B}}_{h,mod}$  und damit  $\mathbf{K}_{stab}$  die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  und die Jacobi-Determinante  $j$  nur am Elementmittelpunkt auszuwerten. Diese Methode kann als Konstruktion der Stabilisierungsmatrix für ein dem Hexaeder zugeordnetes Parallelepiped interpretiert werden. Das Volumen  $\bar{V}_e$  ist deshalb gleich  $8j_c$ .

$$\bar{V}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} j_c dr ds dt = 8j_c \quad (3.63)$$

Die für das fiktive Parallelepiped konstruierten  $\bar{\mathbf{B}}_{h,mod}$ -Matrizen sind mit den in Abschnitt 3.3 beschriebenen  $\bar{\mathbf{B}}_h$ -Matrizen für Parallelepipede bis auf eine Ausnahme identisch. Damit homogene Deformationszustände auch bei beliebiger Elementgeometrie exakt dargestellt werden können, müssen die  $\vec{\mathbf{h}}$ -Vektoren in den  $\mathbf{B}_{h,mod}$ -Matrizen von 2.3 durch die sog.  $\vec{\gamma}$ -Vektoren ersetzt werden.

Die vollständige Berechnung von  $\mathbf{K}_{e,mod}$  erfordert neben der Kenntnis von  $\mathbf{K}_{stab}$  auch die Aufstellung der Matrix  $\mathbf{K}_{conv}$ , die die Konvergenz der neuen Elementformulierung garantiert. An dieser Stelle sei daran erinnert, daß das Elementvolumen von 8-Knoten Hexaedern mit beliebiger Gestalt nicht allein durch den konstanten Anteil der Jacobi-Determinante bestimmt wird. Auch verschwindet der über das gesamte Elementvolumen gemittelte Wert der Matrix  $\mathbf{B}_h$  nicht (siehe hierzu auch *Belytschko, Bindeman* [1993]).

$$\int_{V_e} \mathbf{B}_h dV_e \neq \mathbf{0} \quad , \quad V_e \neq 8j_c \quad (3.64)$$

Die Folge davon ist, daß der Knotenkraftvektor der inneren Spannungen  $\vec{\mathbf{F}}_{int}$  für homogene Spannungszustände  $\vec{\sigma}_c$  eine aufwendigere Berechnung verlangt als der entsprechende Vektor für das zweidimensionale 4-Knoten Element. Diese Tatsache wird in der Literatur oft übersehen.

$$\vec{\mathbf{F}}_{int} = \int_{V_e} (\mathbf{B}_c^T + \mathbf{B}_h^T) \vec{\sigma}_c dV_e = \mathbf{B}_c^T \vec{\sigma}_c V_e + \int_{V_e} \mathbf{B}_h dV_e \vec{\sigma}_c \quad (3.65)$$

Mit (3.64) folgt daher zwingend aus Gleichung (3.65):

$$\vec{\mathbf{F}}_{int} \neq 8j_c \mathbf{B}_c^T \vec{\sigma}_c \quad (3.66)$$

Eine konstante Verzerrungs-Knotenverschiebungsmatrix  $\bar{\mathbf{B}}_c$ , mit der der Knotenkraftvektor  $\vec{\mathbf{F}}_{int}$  exakt berechnet werden kann, wurde von *Flanagan, Belytschko* [1981] in ihrer Untersuchung über das „uniform strain hexahedron“ vorgestellt:

$$\bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{B}_c + \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \mathbf{B}_h dV_e = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \mathbf{B} dV_e \quad . \quad (3.67)$$

Mit dieser  $\bar{\mathbf{B}}_c$ -Matrix kann nun die Rang-6 Matrix  $\mathbf{K}_{conv}$  in einfacher und kompakter Weise dargestellt werden.

$$\mathbf{K}_{conv} = \bar{\mathbf{B}}_c^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}_c V_e = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \mathbf{B}^T dV_e \mathbf{C} \int_{V_e} \mathbf{B} dV_e \quad (3.68)$$

Wenn der Hexaeder Parallelepipedgestalt besitzt, d.h.  $\int_{V_e} \mathbf{B}_h dV_e = \mathbf{O}$  und  $V_e = 8j_c$ , reduziert sich  $\mathbf{K}_{conv}$  auf die bekannte 1-Punkt unterintegrierte Steifigkeitsmatrix.

$$\mathbf{K}_{conv}^{1 \times 1} = 8j_c \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c \quad (3.69)$$

## 3.6 Numerische Beispiele

Die folgenden Beispiele sollen die Vor- und Nachteile der in den Abschnitten 3.2 bis 3.5 beschriebenen Elementformulierungen anhand einiger einfacher, aber aussagekräftiger Beispiele demonstrieren. Die Simulationen sind der einschlägigen Fachliteratur entnommen. Die folgenden Abkürzungen werden in den numerischen Simulationen für die Bezeichnung der verschiedenen Elementtypen verwendet:

- **DISP** ist das konventionelle Verschiebungselement.
- **HR** ist ein 12 Parameter Hellinger-Reissner Element mit unabhängigen Ansatzfunktionen für Verschiebungs- und Spannungsfelder (siehe *Andelfinger, Ramm* [1993]). Dieses Element zeichnet sich im linearen Bereich gegenüber anderen Elementformulierungen durch eine hohe Genauigkeit und große Robustheit bzgl. der Elementgeometrie aus (siehe Tabelle 3.2).
- **EAS/6N**, **EAS/6S**, **EAS/12**, **EAS/12S**, **EAS/21** und **TBW** sind EAS-Elemente, die in Abschnitt 3.2 beschrieben wurden.

### 3.6.1 Eigenwertanalyse verschiedener Elementformulierungen

Die Qualität einer linearen Elementformulierung für inkompressibles Materialverhalten kann durch die Betrachtung der Eigenwerte der Elementsteifigkeitsmatrix bestimmt werden (siehe *Simo et al.* [1993] und *Andelfinger, Ramm* [1993]). Ein Element, das keine volumetrische Versteifung besitzt, besitzt nur einen Eigenwert, der für  $\nu \Leftrightarrow 0.5$  keine obere Grenze besitzt: den Eigenwert der homogenen Dilatation des Elements. Die Anzahl weiterer Eigenwerte, die unbeschränkt zunehmen, zeigt die Stärke der volumetrischen Versteifung an.

Die Untersuchung beschränkt sich auf isotropes, linear elastisches Material mit Elastizitätsmodul  $E=100.0 \text{ N/mm}^2$  und Querkontraktionszahl  $\nu=0.4999$ . In den Tabellen 3.1, 3.2 und 3.3 sind die sechs Nulleigenwerte, die den Starrkörpermoden zugeordnet sind, nicht aufgeführt.

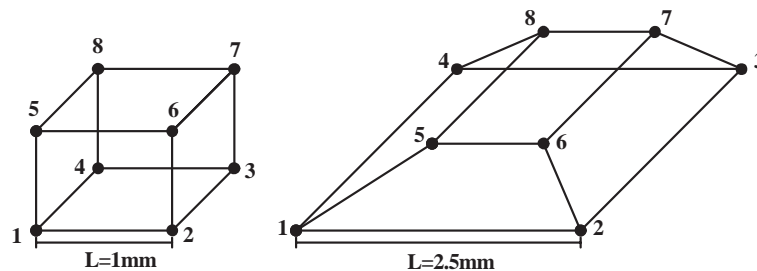


Abb. 3.4: Würfel (links) und verformter Hexaeder (rechts)

Tabelle 3.1: Eigenwerte des Würfels ( $E=100 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu=0.4999$ )

Nr.	DISP	HR	EAS/6N	TBW	EAS/12	EAS/21
7	$5.6 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$	$3.7 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$	$3.7 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$
8	$5.6 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$	$3.7 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$	$3.7 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$
9	$1.7 \times 10^1$	$5.6 \times 10^0$	$3.7 \times 10^0$	$1.1 \times 10^1$	$3.7 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$
10	$1.7 \times 10^1$	$5.6 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$	$1.1 \times 10^1$	$5.6 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$
11	$1.7 \times 10^1$	$5.6 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$	$1.1 \times 10^1$	$5.6 \times 10^0$	$5.6 \times 10^0$
12	$2.2 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$	$1.7 \times 10^1$	$2.2 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$
13	$3.3 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$	$1.7 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$
14	$3.3 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$	$1.7 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$
15	$3.3 \times 10^1$	$2.2 \times 10^1$	$2.2 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$2.2 \times 10^1$	$2.2 \times 10^1$
16	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
17	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
18	$9.2 \times 10^4$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
19	$9.2 \times 10^4$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
20	$9.2 \times 10^4$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
21	$5.5 \times 10^5$	$3.3 \times 10^1$	$3.9 \times 10^1$	$9.2 \times 10^4$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
22	$5.5 \times 10^5$	$3.3 \times 10^1$	$3.9 \times 10^1$	$9.2 \times 10^4$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
23	$5.5 \times 10^5$	$3.3 \times 10^1$	$3.9 \times 10^1$	$9.2 \times 10^4$	$3.3 \times 10^1$	$3.3 \times 10^1$
24	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$

In Tabelle 3.1 sind die Eigenwerte eines Würfels der Kantenlänge 1mm dargestellt. Die kritischen Eigenwerte, die auf eine volumetrische Versteifung hinweisen, sind fett gedruckt. Die Eigenwerte der sechs homogenen Verzerrungszustände, die in allen Elementformulierungen identisch sind, sind grau unterlegt. Diese Eigenmoden entsprechen drei Scherungen, Zug in zwei orthogonalen Richtungen und einer Dilatation des Elementes.

Betrachtet man das Ergebnis der Eigenwertuntersuchung in Tabelle 3.1, so zeigen die Elemente TBW und DISP die nach Abschnitt 3.2 zu erwartende volumetrische Versteifung: 6 Eigenwerte des DISP- und 3 des TBW-Elementes täuschen inhomogene Dilatationsmoden vor. Diese Versteifung ist aber alleine numerisch bedingt. Die Elemente EAS/6N, EAS/12 und EAS/21 besitzen dagegen nur die homogene Dilatationsform.

Die Tabellen 3.2 und 3.3 enthalten die Eigenwerte des „verzerrten“ Hexaeders (siehe Abb. 3.4). Im Gegensatz zu Tabelle 3.1 sind die Eigenwerte des konventionellen Verschiebungselementes, das bereits bei Parallelepipedern schlechte Ergebnisse zeigt, nicht aufgeführt. Die Steifigkeitsmatrizen der Elemente in Tabelle 3.2 wurden mit der konventionellen 8-Punkt Integration nach Gauss berechnet. Bei den EAS- und HR-Elementen wurde die volle statische Kondensation der inneren Parameter durchgeführt. Im Gegensatz dazu

sind in Tabelle 3.3 Eigenwerte modifizierter Steifigkeitsmatrizen aufgelistet. Das Vorgehen bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrizen wurde in Abschnitt 3.5 vorgestellt.

Tabelle 3.2: Eigenwerte des Hexaeders ( $E=100 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu=0.4999$ )

Nr.	HR	EAS/6N	TBW	EAS/12	EAS/21
7	$1.5 \times 10^0$	$7.5 \times 10^0$	$2.4 \times 10^1$	$7.5 \times 10^0$	$9.3 \times 10^0$
8	$8.0 \times 10^0$	$1.7 \times 10^1$	$2.6 \times 10^1$	$1.6 \times 10^1$	$1.1 \times 10^1$
9	$8.7 \times 10^0$	$2.2 \times 10^1$	$3.4 \times 10^1$	$1.7 \times 10^1$	$2.1 \times 10^1$
10	$2.5 \times 10^1$	$3.5 \times 10^1$	$4.2 \times 10^1$	$2.8 \times 10^1$	$2.5 \times 10^1$
11	$2.4 \times 10^1$	$3.9 \times 10^1$	$4.5 \times 10^1$	$3.2 \times 10^1$	$2.9 \times 10^1$
12	$2.9 \times 10^1$	$4.3 \times 10^1$	$5.2 \times 10^1$	$4.1 \times 10^1$	$3.4 \times 10^1$
13	$3.7 \times 10^1$	$5.8 \times 10^1$	$7.1 \times 10^1$	$4.3 \times 10^1$	$3.8 \times 10^1$
14	$5.2 \times 10^1$	$6.2 \times 10^1$	$7.6 \times 10^1$	$5.7 \times 10^1$	$4.8 \times 10^1$
15	$6.0 \times 10^1$	$7.9 \times 10^1$	$8.6 \times 10^1$	$7.0 \times 10^1$	$6.3 \times 10^1$
16	$6.4 \times 10^1$	$8.6 \times 10^1$	$1.2 \times 10^2$	$7.3 \times 10^1$	$7.0 \times 10^1$
17	$6.9 \times 10^1$	$9.0 \times 10^1$	$1.3 \times 10^2$	$8.8 \times 10^1$	$8.4 \times 10^1$
18	$9.4 \times 10^1$	$1.1 \times 10^2$	$1.5 \times 10^2$	$9.9 \times 10^1$	$8.7 \times 10^1$
19	$9.5 \times 10^1$	$1.3 \times 10^2$	$2.1 \times 10^2$	$1.3 \times 10^2$	$1.2 \times 10^2$
20	$1.2 \times 10^2$	$1.7 \times 10^2$	<b><math>5.3 \times 10^4</math></b>	$1.5 \times 10^2$	$1.4 \times 10^2$
21	$1.4 \times 10^2$	$3.1 \times 10^2$	<b><math>5.2 \times 10^5</math></b>	$3.0 \times 10^2$	$1.6 \times 10^2$
22	$2.1 \times 10^2$	$3.7 \times 10^2$	<b><math>5.4 \times 10^5</math></b>	$3.5 \times 10^2$	$1.9 \times 10^2$
23	$2.4 \times 10^2$	<b><math>1.2 \times 10^5</math></b>	<b><math>1.2 \times 10^6</math></b>	<b><math>1.2 \times 10^5</math></b>	<b><math>1.2 \times 10^5</math></b>
24	<b><math>7.4 \times 10^6</math></b>	<b><math>7.4 \times 10^6</math></b>	<b><math>7.4 \times 10^6</math></b>	<b><math>7.4 \times 10^6</math></b>	<b><math>7.4 \times 10^6</math></b>

Beim Übergang vom Würfel zum Hexaeder tritt die in Abschnitt 3.4 beschriebene Versteifung der EAS-Formulierung auf. Die „versteifungsfreien“ Elemente EAS/6N, EAS/12 und EAS/21 haben nun einen zweiten sehr großen Eigenwert, der eine Volumenveränderung des Elementes vortäuscht. Das TBW Element zeigt ein ähnliches Verhalten. Eine Ausnahme bildet dagegen das HR-Element: bei dieser Formulierung verursacht die von der Parallelepipedgestalt abweichende Elementgeometrie keine volumetrische Versteifung.

Tabelle 3.3 zeigt deutlich die Auswirkung der Modifikationen der Elementsteifigkeitsmatrizen nach Abschnitt 3.5. Der in Tabelle 3.2 beim Hexaeder gegenüber Tabelle 3.1 auftretende zusätzliche große Eigenwert der EAS-Elemente ist beseitigt, d.h. die durch die Geometrie bedingte volumetrische Versteifung tritt nicht mehr auf.

Tabelle 3.3: Eigenwerte für den Hexaeder –  
Elemente nach Abschnitt 2.5 modifiziert

Nr.	HR	EAS/6N	TBW	EAS/12	EAS/21
17	$6.9 \times 10^1$	$8.5 \times 10^1$	$1.2 \times 10^2$	$6.9 \times 10^1$	$6.9 \times 10^1$
18	$9.1 \times 10^1$	$9.2 \times 10^1$	$1.5 \times 10^2$	$9.1 \times 10^1$	$9.1 \times 10^1$
19	$9.1 \times 10^1$	$1.0 \times 10^1$	$1.7 \times 10^2$	$9.1 \times 10^1$	$9.1 \times 10^1$
20	$1.2 \times 10^2$	$1.2 \times 10^2$	$2.0 \times 10^2$	$1.2 \times 10^2$	$1.2 \times 10^2$
21	$1.5 \times 10^2$	$1.7 \times 10^2$	$1.8 \times 10^5$	$1.5 \times 10^2$	$1.5 \times 10^2$
22	$1.7 \times 10^2$	$1.8 \times 10^2$	$1.8 \times 10^5$	$1.7 \times 10^2$	$1.7 \times 10^2$
23	$2.0 \times 10^2$	$2.1 \times 10^2$	$4.2 \times 10^5$	$2.0 \times 10^2$	$2.0 \times 10^2$
24	$7.4 \times 10^6$	$7.4 \times 10^6$	$7.4 \times 10^6$	$7.4 \times 10^6$	$7.4 \times 10^6$

### 3.6.2 Inkompressibler Block

Dieses für die Boden- und Geomechanik typische Problem zeigt deutlich die negativen Auswirkungen der volumetrischen Versteifung auf das Verschiebungsfeld. Biegung und Scherung treten in diesem Beispiel, das von *Andelfinger und Ramm* [1993] vorgeschlagen wurde, nicht auf.

Ein Quader der Höhe  $H=50$  mm und Seitenlänge  $L=100$  mm, der an seiner Grundfläche unverschieblich gelagert ist, wird durch eine homogene Drucklast  $q=250$  N/mm<sup>2</sup> auf einer Fläche von  $20 \times 20$  mm um den Mittelpunkt der Oberfläche belastet. Aus Symmetriegründen reicht es aus, daß nur ein Viertel des Quaders modelliert wird. Der Viertelquader wird mit  $5 \times 5 \times 5$  8-Knoten Elementen vernetzt. Die Werkstoffkonstanten  $E=210000$  N/mm<sup>2</sup> und  $\nu=0.4999$  garantieren inkompressible Deformationen des Quaders.

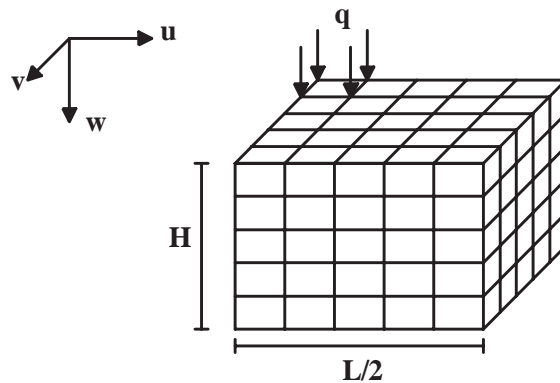


Abb. 3.5: inkompressibler Block ( $H=50$  mm,  $L/2=50$  mm)

Tabelle 3.4 enthält die Werte der Vertikalverschiebung des Mittelpunktes der Oberfläche des Blocks für unterschiedliche Elementformulierungen. Die Elemente HR, EAS/12, EAS/21

und die lineare Version des **S**elective **R**educed **I**ntegrated (SRI) Elementes (s. *Hughes, Malkus* [1978]), bei dem der volumetrische Anteil der Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes unterintegriert wird, sind erwartungsgemäß versteifungsfrei. Hervorzuheben ist das gute Ergebnis des Elementes EAS/6N, das gegenüber den anderen EAS-Elementen und auch dem HR-Element (12 interne Parameter) mit der geringen Anzahl von nur 6 inneren Freiheitsgraden die volumetrische Versteifung beseitigt. Das konventionelle Verschiebungselement DISP und das TBW-Element verhalten sich sehr steif, was die Untersuchungen in Abschnitt 3.2 bestätigt.

Element	HR	DISP	SRI	EAS/6N	TBW	EAS/12	EAS/21
$W_c$	0.019	0.0016	0.0197	0.0186	0.011	0.019	0.019

Tabelle 3.4: Vertikalverschiebung  $W_c$  (in mm) des Oberflächenmittelpunktes

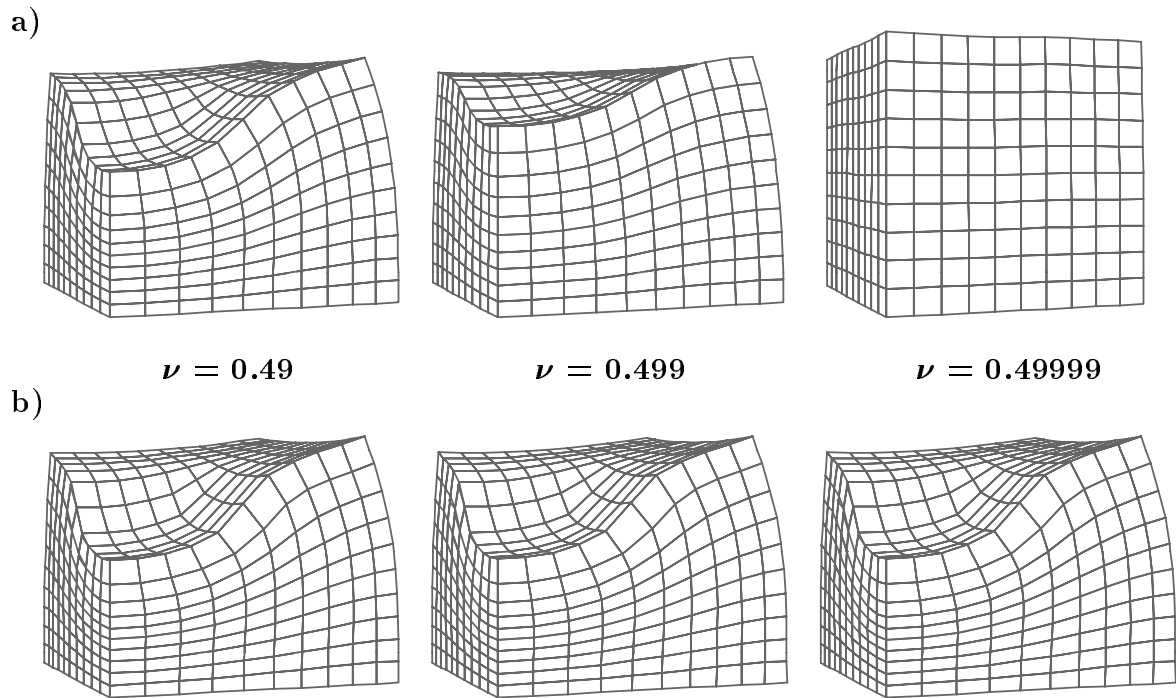


Abb. 3.6: Kompression eines elastischen Blocks für verschiedene Querkontraktionszahlen

- a) Elemente mit volumetrischer Versteifung
- b) Elemente ohne volumetrische Versteifung

Abb. 3.6 zeigt sehr deutlich, wie sich unterschiedliche Elemente bei zunehmender Inkompressibilität in ihrem Deformationsverhalten unterscheiden. Die Bilder oben in Abb. 3.6 zeigen Netze für die Elemente DISP, EAS/6S und EAS/12S. Darunter sind verformte Netze der EAS-Elemente ohne volumetrische Versteifung, des HR- und des SRI-Elementes zu



sehen. Die Elemente EAS/6S, EAS/12S und DISP versteifen für Werte von  $\nu$  nahe 0.5 vollständig. Eine Verformung des Blocks ist für  $\nu = 0.49999$  nicht möglich (Bild oben rechts). Die Deformationen der Elemente EAS/6N, EAS/12, EAS/21, HR und SRI hingegen sind unabhängig vom Wert der Querkontraktionszahl  $\nu$ .

### 3.6.3 3D-Elemente als Plattenelemente

Eine dünne, fest eingespannte Platte mit Seitenlänge 100 mm und Dicke 1.0 mm wird durch eine vertikale Einzelkraft  $P=16.367$  N im Plattenmittelpunkt belastet. Dieses Beispiel dient dazu, die Qualität und die Grenzen des Einsatzes von 8-Knoten Volumenelementen in Plattenbiegungsproblemen zu bestimmen. Die Werkstoffkonstanten  $E=10000$  N/mm<sup>2</sup> und  $\nu=0.3$  wurden so gewählt, daß die mit der Kirchhoff Theorie berechnete Durchbiegung im Punkt P 1.0 mm beträgt. Aus Symmetriegründen ist die Diskretisierung einer Viertelplatte mit einem  $2 \times 2 \times 1$  Netz ausreichend. Die Verwendung nur einer einzigen Elementschicht über die Plattendicke ist sinnvoll, da eine Bewertung der Ergebnisse sich an 4-Knoten Plattenelementen orientieren muß.

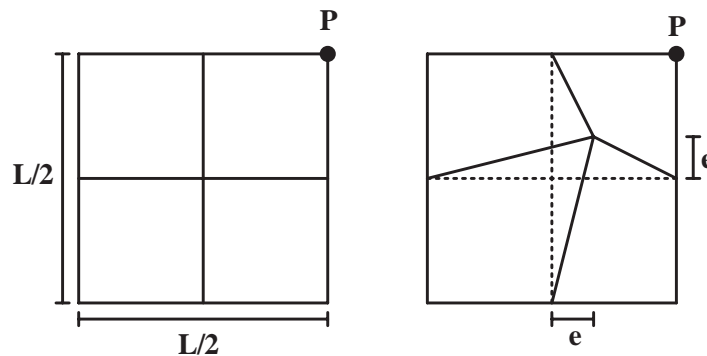


Abb. 3.7: Eingespannte Platte mit Einzelkraft ( $L/2=50$  mm,  $e=10$  mm)

In Tabelle 3.5 sind die Ergebnisse für das unverzerrte Netz (Verzerrungsparameter  $e=0$ ) dargestellt. Das Hellinger-Reissner Element und die EAS-Elemente, die ausschließlich lineare Scherterme enthalten (die Elemente mit 12 inkompatiblen Schertermen EAS/12S und EAS/21), liefern zufriedenstellende Resultate.

Element	HR	DISP	EAS/6S	EAS/12S	EAS/12	EAS/21
$W_c$	0.888	0.0068	0.072	0.72	0.074	0.888

Tabelle 3.5: Vertikalverschiebung  $W_c$  (in mm) am Punkt P ( $e=0$ )

In Tabelle 3.6 werden für das verzerrte Netz die Ergebnisse  $W_c$  (stand.), die mit den konventionell unter Verwendung der 8-Punkt Integration nach Gauß berechneten Elementsteifigkeitsmatrizen gewonnen werden, mit den Resultaten  $W_c$  (mod.) der nach Abschnitt 3.5 berechneten Elemente verglichen. Zwischen den Ergebnissen besteht kein *signifikanter* Unterschied. Der Genauigkeitsverlust gegenüber den Werten in Tabelle 3.5 bei den Elementen HR, EAS/12S und EAS/21 ist alleine auf die Netzverzerrung zurückzuführen. Sämtliche dreidimensionalen 8-Knoten Elemente sind empfindlich gegenüber der Abweichung der Elementgeometrie von der Parallelepipedgestalt. Diese Abhängigkeit kann selbstverständlich durch die in Abschnitt 3.5 vorgestellte Modifikation nicht aufgehoben werden. Der Aufwand bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen kann dadurch aber erheblich reduziert werden.

Element	HR	DISP	EAS/6S	EAS/12S	EAS/12	EAS/21
$W_c$ (stand.)	0.57	0.0064	0.065	0.51	0.066	0.58
$W_c$ (mod.)	0.57	0.0064	0.067	0.49	0.068	0.57

Tabelle 3.6: Vertikalverschiebung am Punkt P ( $e=10$  mm)**Bemerkung:**

Wenn in Beispiel 3.6.3 die Plattendicke bei konstanter Anzahl der Elemente verkleinert wird, so ist die Lösung davon abhängig, ob ein Netz aus Quadern (Abb. 3.7 links) oder ein unregelmäßiges Hexaedernetz (Abb. 3.7 rechts) verwendet wird. Das Verhältnis der Verschiebung in Plattenmitte zur Kirchhoff-Lösung ist im ersten Fall unabhängig von der Dicke bzw. dem Verhältnis von Dicke und Plattenlänge. Das Ergebnis hängt ausschließlich von der Elementformulierung ab. Im zweiten Fall hingegen ergibt sich eine starke Abhängigkeit der berechneten Verschiebung von der Plattendicke. Es tritt das sog. „thin mesh locking“ auf. Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, daß die Hexaeder mit abnehmender Dicke versteifen. Diese Versteifung besitzen die EAS-Elemente ebenso wie das HR-Element. *Sze, Ghali* [1992] untersuchten dieses Problem ausführlich. Abhilfe kann hier nur mit einer Skalierung der Scherungsterme bei der EAS-Methode bzw. der Schubspannungsterme beim HR-Element erreicht werden.

### 3.7 Diskussion und Ausblick

Die modifizierte Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{e,mod}$ , die in Abschnitt 3.5 vorgestellt wurde, ist eine gute Approximation der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  in (3.14), die mit 8-Punkt Integration nach Gauß und vollständiger statischer Kondensation der EAS-Parameter berechnet wird. Die Gestalt der Hexaeder sollte nur geringe Abweichungen von der Gestalt eines Quaders oder Parallelepipeds aufweisen. Für stark von einem Parallelepiped abweichende Elementgeometrien, die bei der Netzgenerierung möglichst vermieden werden sollten, können keine Resultate erwartet werden, die qualitativ mit denen eines Quaders oder Parallelepipeds vergleichbar sind. Diese starke Sensitivität der Berechnungsergebnisse von der Elementgeometrie ist weitgehend unabhängig von einer speziellen Elementformulierung: sie tritt sowohl bei EAS- und HR-Elementen als auch beim konventionellen Verschiebungselement auf. Aufgrund der geringen Qualität allgemeiner Hexaeder sollte der Aufwand bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix und des inneren Kraftvektors so gering wie möglich sein, homogene Spannungs- und Deformationszustände sollten aber ohne Fehler dargestellt werden können. Diese Forderungen werden von der in Abschnitt 3.5 vorgeschlagenen Elementformulierung erfüllt.

Elementformulierungen, die auch für beliebige Elementgeometrien zuverlässige Ergebnisse garantieren, basieren auf einer Extrapolation der für Parallelepipede konstruierten Verzerrungsfelder auf allgemeine Hexaeder. Diese Extrapolation ist aber mit erheblichem zusätzlichem Berechnungsaufwand verbunden. Als Beispiel dieser neuen Vorgehensweise soll an dieser Stelle die sog. „assumed strain“ Methode von *Stolarski, Chen* [1998] genannt werden. Das nach ihrer Methode konstruierte 8-Knoten Element liefert bei Biegebelastung selbst für stark verformte Elementgestalt noch hervorragende Ergebnisse. Ein Nachteil bzgl. des Deformationsverhaltens ist, daß das Element nur für Parallelepipede den sog. „Patch-Test“ erfüllt. Der Aufwand, den die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix erfordert, wird im wesentlichen durch die Invertierung von zwei vollbesetzten  $24 \times 24$  Matrizen bestimmt.

# Kapitel 4

## EAS-Elemente für nichtlineare Probleme

Eine vollständige Diskussion der „enhanced assumed strain“ Methode erfordert auch die Darstellung der nichtlinearen Variante dieser Elementformulierung. Modifikationen der Elementsteifigkeitsmatrix, die im linearen Bereich ohne Qualitätsverlust zu einer erheblichen Steigerung der Effizienz der EAS-Elemente führten (siehe Abschnitt 3), existieren im nichtlinearen Bereich bisher nicht. Man ist daher auf die im folgenden beschriebenen 8-Knoten EAS-Elemente in ihrer Originalformulierung von *Simo et al.* [1992], [1993] angewiesen.

### 4.1 Einführung

Von *Simo, Armero* [1992] und *Simo, Armero, Taylor* [1993] wurde das EAS-Konzept auch zur Formulierung von Elementen zur Berechnung geometrisch und materiell nichtlinearer Probleme erweitert. Ziel der Überlegungen für ein nichtlineares EAS-Element war das universell einsetzbare 8-Knoten Element: ein Element, das **weder** die sog. volumetrische Versteifung für quasi-inkompressible Werkstoffe **noch** die Biegeversteifung besitzt. Daß diese beiden Forderungen zugleich von einer nichtlinearen Elementformulierung erfüllt werden, ist keineswegs selbstverständlich. So existierten schon vor Veröffentlichung der nichtlinearen EAS-Methode Formulierungen wie die Selektiv Reduzierte Integration (SRI) (siehe *Hughes, Malkus* [1978]) oder das auf einer 3-Feld Hybrid Methode mit konstantem Druck basierende Q1P0-Element (siehe *Simo et al.* [1985]). Diese Methoden unterdrücken das sog. „incompressibility-locking“ in einer totalen Lagrange Formulierung zuverlässig. Die Versteifung von Elementen, die auf Biegung beansprucht und dadurch stark deformiert werden, konnte allerdings bis dahin durch kein Verfahren zufriedenstellend beseitigt werden.

Der Aufwand für die Berechnung des inneren Kraftvektors und der Tangentensteifigkeitsmatrix der EAS-Elemente ist jedoch im Vergleich zum Q1P0- oder SRI-Element deutlich höher. Der höhere Aufwand bezieht sich sowohl auf die Rechenzeit als auch den zusätz-

lichen Speicher, der für die EAS-Parameter reserviert werden muß. Je nach Elementtyp müssen 9 oder 12 innere Freiheitsgrade für jedes Element gespeichert werden. Aufgrund dieses Nachteils der EAS-Elemente wäre es vorteilhaft, wenn sich der Anwender schon vor der Diskretisierung einer Struktur Gedanken über die zu erwartenden Verformungen macht. Bereiche, in denen mit Sicherheit keine Biegung auftritt, können mit den vergleichsweise „billigen“  $\bar{\mathbf{F}}^{-1}$ , SRI- oder Q1P0-Elementen vernetzt werden. Die Qualität der berechneten Deformationen und Spannungen wird in den „biegefreien Zonen“ durch die Wahl dieser Elemente nicht eingeschränkt. Für Simulationsgebiete mit homogenen Deformationen ist sogar das Standard-Verschiebungselement ausreichend.

Ein weiterer Schwachpunkt der nichtlinearen EAS-Elemente ist das mögliche Auftreten sog. „hourglass“ Verformungen. Diese sind mit einem Rangabfall der Elementsteifigkeitsmatrix verbunden, der nicht durch eine Material- oder Strukturinstabilität bedingt ist (siehe *Wriggers, Reese* [1996]). Um diese unphysikalische Instabilität der EAS-Methode, die bei homogenen Kompressionen und sog. „necking-bar“ Problemen auftritt, zu vermeiden, müssen spezielle Techniken angewandt werden (siehe hierzu auch *de Souza Neto et al.* [1995], *Glaser, Armero* [1997], *Korelc, Wriggers* [1996] und Vorträge zu diesem Thema auf dem *EUROMECH*-Kolloquium 371 in Bad Herrenalb [1997]). „Hourglass“-Deformationen treten auch bei anderen versteifungsfreien Elementen auf, sie sind jedoch bei nichtlinearen EAS-Elementen besonders stark ausgeprägt.

## 4.2 Konstruktion des $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators

Die kinematische Größe, die in der EAS-Methode im geometrisch nichtlinearen Bereich in einer totalen Lagrange Formulierung verändert werden muß, ist der Deformationstensor  $\mathbf{F}$  bzw. der Verschiebungsgradient bzgl. der Ausgangskonfiguration  $\text{GRAD } \vec{\mathbf{u}}$ . Dieser setzt sich zusammen aus einem homogenen Anteil  $\mathbf{F}_c$  und einem ortsabhängigen Anteil  $\mathbf{F}_h$ :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_h$ . Der  $\mathbf{F}$ -Tensor der konventionellen Verschiebungsmethode wird durch die Addition des nichtkonstanten Operators  $\tilde{\mathbf{F}}$  erweitert. Das Resultat ist ein neuer Deformationstensor, der sog.  $\bar{\mathbf{F}}$ -Tensor.

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \text{GRAD } \vec{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{F}}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\mathbf{F}_{mod}^h = \mathbf{F}_h + \tilde{\mathbf{F}}} \quad (4.1)$$

Die Konstruktionsprinzipien für den Tensor  $\tilde{\mathbf{F}}$  wurden ausführlich von *Simo, Armero, Taylor* [1993] beschrieben. An dieser Stelle ist daher eine Zusammenfassung der dort vorgeschlagenen Vorgehensweise ausreichend.

Die Berechnung von  $\tilde{\mathbf{F}}$  erfolgt in drei Schritten. Der erste Schritt ist die Auswahl der EAS-Interpolationsterme, zusammengefaßt in der Matrix  $\mathbf{E}_\xi$ , anhand des  $\mathbf{F}$ -Tensors eines

---

<sup>1</sup>Auch in der EAS-Methode wird ein sog.  $\bar{\mathbf{F}}$ -Tensor verwendet. Im Unterschied zu den in Abschnitt 5 vorgestellten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elementen hängt dieser Tensor nicht alleine von den Verschiebungen ab. Der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Tensor der in Abschnitt 5 beschriebenen Elemente kann explizit, d.h. ohne statische Kondensation innerer Parameter, berechnet werden.

parallel zur globalen kartesischen Basis ausgerichteten Quaders, d.h. eines Elementes mit einer konstanten und nur auf der Diagonalen besetzten Jacobimatrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{h} \end{pmatrix}$$

mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $h$ . Diese Methode zur gezielten Auswahl der EAS–Terme ist analog zum Verfahren in der linearen Elastizität, in der der infinitesimale Verzerrungstensor bzw. die  $\mathbf{B}$ -Matrix verändert wird. Der Tensor  $\mathbf{E}_\xi$  wird mittels der am Elementmittelpunkt ausgewerteten Jacobi–Matrix  $\mathbf{J}_c$  in die Referenzkonfiguration transformiert.

$$\mathbf{E} = \frac{j_c}{j} \mathbf{J}_c^{-1} \mathbf{E}_\xi \mathbf{J}_c^{-T} \quad (4.2)$$

Der Faktor  $j_c/j$ , der Quotient aus der Jacobi-Determinante am Elementmittelpunkt und am Ort  $\xi$ , garantiert zusammen mit der Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{E}_\xi dr ds dt = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

die Erfüllung des Patch-Tests für beliebige Referenzgeometrien. Der letzte Schritt bei der Aufstellung von  $\tilde{\mathbf{F}}$  ist die Linksmultiplikation von  $\mathbf{E}$  mit dem konstanten Tensor  $\mathbf{F}_c$ . Dadurch wird gewährleistet, daß  $\tilde{\mathbf{F}}$  und damit  $\bar{\mathbf{F}}$  sich bei Starrkörperrotationen wie der konventionelle Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  verhalten.

$$\boxed{\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_c \frac{j_c}{j} \mathbf{J}_c^{-1} \mathbf{E}_\xi \mathbf{J}_c^{-T} = \mathbf{F}_c \mathbf{E}} \quad (4.4)$$

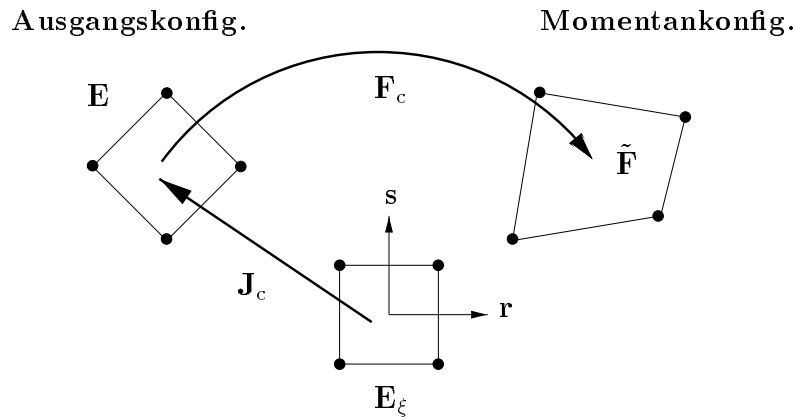


Abb. 3.1: Konstruktion des zweidimensionalen inkompatiblen  $\tilde{\mathbf{F}}$ -Tensors

Aufgrund der Definition von  $\bar{\mathbf{F}}$  sind die Eigenschaften des EAS-Elementes invariant bei einer Drehung des Elementes gegenüber dem globalen Koordinatensystem. Diese durch die Konstruktionsvorschrift (4.4) gesicherte Drehinvarianz ist für eine zuverlässige geometrisch nichtlineare FE-Formulierung unbedingt erforderlich.

Der ortsabhängige Anteil  $\mathbf{F}_h$  des konventionellen Deformationstensors  $\mathbf{F}$  für einen achsenparallelen Quader enthält unvollständige lineare und bilineare Polynome in den isoparametrischen Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$ . Diese Unvollständigkeit führt zu Kopplungen zwischen Normalverzerrungen und Scherungen im rechten Cauchy oder im Greenschen Verzerrungstensor. Die Biegeversteifung des Standard-Verschiebungselementes ist eine direkte Folge dieser Kopplungen.

$$\mathbf{F}_h = \begin{bmatrix} s A_{u,1} + t A_{u,2} + s t A_{u,4} & r A_{u,1} + t A_{u,3} + r t A_{u,4} & r A_{u,2} + s A_{u,3} + r s A_{u,4} \\ s A_{v,1} + t A_{v,2} + s t A_{v,4} & r A_{v,1} + t A_{v,3} + r t A_{v,4} & r A_{v,2} + s A_{v,3} + r s A_{v,4} \\ s A_{w,1} + t A_{w,2} + s t A_{w,4} & r A_{w,1} + t A_{w,3} + r t A_{w,4} & r A_{w,2} + s A_{w,3} + r s A_{w,4} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Mit den Konstanten :

$$A_{u,i} := \vec{\mathbf{u}}_n^T \vec{\mathbf{h}}_i, \quad A_{v,i} := \vec{\mathbf{v}}_n^T \vec{\mathbf{h}}_i \quad \text{und} \quad A_{w,i} := \vec{\mathbf{w}}_n^T \vec{\mathbf{h}}_i \quad (i=1..4).$$

Die Biegeversteifung kann, zumindest für einen Quader oder ein Parallelepiped, durch einen Deformationsanteil  $\mathbf{E}_\xi$  beseitigt werden, der die Terme enthält, die für die lineare Vollständigkeit von  $\mathbf{F}_h$  benötigt werden. Das damit verbundene 9 Parameter EAS-Element entspricht in seinen Eigenschaften dem inkompatiblen Verschiebungselement von *Taylor, Beresford, Wilson* [1976], das in dieser Dissertation mit *TBW* bezeichnet wird.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\xi^{TBW} = & \varphi_1 \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \varphi_4 \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \\ & + \varphi_7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ausgehend vom *TBW*-Element, das man in der Literatur auch unter dem Namen Q1E9 findet, entwickelten *Wriggers, Korelc* [1996] das sog. CG9-Element. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden EAS-Varianten ist die Struktur der Matrix  $\mathbf{E}_\xi$ :

$$\mathbf{E}_\xi^{CG9} = [\mathbf{E}_\xi^{TBW}]^T \quad (4.7)$$

Beispielrechnungen zeigen, daß das CG9-Element robuster ist als das Q1E9 Element.

Da mit dem inkompatiblen Verschiebungselement die linearisierte Zwangsbedingung für inkompressibles Materialverhalten nicht erfüllt werden kann, haben *Simo, Armero, Taylor* [1993] ein 12 Parameter EAS-Element, abgekürzt durch *SAT*, mit drei bilinearen Interpolationstermen vorgeschlagen.

$$\mathbf{E}_\xi^{SAT} = \mathbf{E}_\xi^{TBW} + \varphi_{10} r s \mathbf{1} + \varphi_{11} r t \mathbf{1} + \varphi_{12} s t \mathbf{1} \quad (4.8)$$

Diese Erweiterung des „klassischen“ inkompatiblen Verschiebungselementes um drei weitere innere Freiheitsgrade wird gerechtfertigt durch die punktweise Erfüllung der Zwangsbedingung  $\text{SP}(\mathbf{F}_h + \bar{\mathbf{F}}) = \text{SP}(\mathbf{F}_{mod}^h) = 0$ . In vielen Fällen wird mit 9 linearen und 3 bilinearen inkompatiblen Interpolationstermen die volumetrische Versteifung des konventionellen Verschiebungselementes hinreichend unterdrückt.

Strukturen aus inkompressiblen Materialien können ausschließlich volumentreu verformt werden. Da das Volumen nicht verändert werden kann, muß die Determinante des Deformationstensors gleich 1 sein.  $\text{Det}(\bar{\mathbf{F}})=1$  ist daher die Zwangsbedingung für nichtlineare inkompressible Werkstoffe. Ein vollkommen versteifungsfreies Element müßte deshalb so konstruiert sein, daß die Determinante von  $\bar{\mathbf{F}}$  nur vom versteifungsfreien konstanten Teil des Verschiebungsgradienten abhängt.

$$\text{Det}(\bar{\mathbf{F}}) \equiv \text{Det}(\mathbf{1} + \text{GRAD}_c(\vec{\mathbf{u}})) \quad (4.9)$$

Diese Bedingung kann nicht dadurch erfüllt werden, daß die Spur des ortsabhängigen Tensors  $\mathbf{F}_{mod}^h$  verschwindet. Mit Hilfe der folgenden Identität für beliebige Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{X}$

$$\text{Det}(\mathbf{1} + \mathbf{X}) = 1 + \text{SP}(\mathbf{X}) + \underbrace{\frac{1}{2} ([\text{SP}(\mathbf{X})]^2 \Leftrightarrow \text{SP}(\mathbf{X})^2)}_{= J_2(\mathbf{X})} + \text{Det}(\mathbf{X})$$

(4.10)

kann diese Aussage präzisiert werden. Nach Einsetzen von  $\bar{\mathbf{F}}$  und unter Berücksichtigung von  $\text{SP}(\mathbf{F}_{mod}^h)=0$  ergibt sich für  $\text{Det}(\bar{\mathbf{F}})$  der folgende Ausdruck.

$$\begin{aligned} \text{Det}(\bar{\mathbf{F}}) \Leftrightarrow 1 &= \text{SP}(\text{GRAD}_c(\vec{\mathbf{u}})) + J_2(\text{GRAD}_c(\vec{\mathbf{u}})) \\ &\Leftrightarrow 0.5 \text{SP} [\text{GRAD}_c(\vec{\mathbf{u}}) \mathbf{F}_{mod}^h + \mathbf{F}_{mod}^h \text{GRAD}_c(\vec{\mathbf{u}})] \\ &\Leftrightarrow 0.5 \text{SP} (\mathbf{F}_{mod}^h \mathbf{F}_{mod}^h) \\ &+ \text{Det}(\text{GRAD}_c(\vec{\mathbf{u}}) + \mathbf{F}_{mod}^h) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Es ist gut erkennbar, daß  $\text{Det}(\bar{\mathbf{F}})$  nicht nur von der zweiten und dritten Potenz von  $\mathbf{F}_{mod}^h$



abhängt. Die noch vorhandene lineare Abhängigkeit der Determinante von  $\mathbf{F}_{mod}^h$  kann sich evtl. qualitätsmindernd bei starken Deformationen auswirken. D.h. mit den vorliegenden nichtlinearen EAS-Formulierungen ist die Konstruktion eines völlig versteifungsfreien Elementes nicht möglich. Die Sicherheit auch in diesen Fällen mit einem versteifungsfreien Element zu arbeiten, bieten alleine die expliziten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente oder das Q1P0-Element (siehe Abschnitt 5).

### 4.3 Schwache Form des Gleichgewichts

Für eine Untersuchung der EAS-Methode bzgl. Nichtlinearität genügt es, sich auf hyperelastische Werkstoffmodelle zu beschränken, da damit auch quasi-inkompressible Materialien modelliert werden können. Der Vorteil der Hyperelastizität besteht darin, daß eine Verzerrungsenergiedichte  $W(\bar{\mathbf{C}})$  ( $\bar{\mathbf{C}} := \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$  ist ein modifizierter rechter Cauchy-Green Tensor) existiert, aus der die Spannungen berechnet werden. Unter der Voraussetzung, daß für die äußeren Lasten eine potentielle Energie  $\Pi_{ext}$  existiert, ist die Variation der gesamten potentiellen Energie identisch mit der schwachen Form der Gleichungen des mechanischen Gleichgewichts.

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} = \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + \Pi_{ext}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (4.12)$$

Die Berechnung der Variation  $\delta\Pi_{int} + \delta\Pi_{ext} = 0$  erfordert die Kenntnis der Abhängigkeit von  $\delta\bar{\mathbf{C}}$  bzw.  $\delta\bar{\mathbf{F}}$  von der Variation des Verschiebungsfeldes und der inneren Parameter  $\delta\varphi_i$ . In den folgenden Ausführungen werden der Gradientenoperator bzgl. der Ausgangskonfiguration mit  $\text{GRAD}$  und bzgl. der Momentankonfiguration mit  $\text{grad}$  bezeichnet. Der Index  $c$  bedeutet, daß nur der konstante Anteil der entsprechenden Größe berechnet wird.

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mathbf{F}} &= \delta\mathbf{F} + \delta\tilde{\mathbf{F}} \\ &= \text{GRAD}(\delta\bar{\mathbf{u}}) + \text{GRAD}_c(\delta\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{E} + \mathbf{F}_c \delta\mathbf{E} \\ &= \text{GRAD}(\delta\bar{\mathbf{u}}) + \text{GRAD}_c(\delta\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{E} + \mathbf{F}_c \sum_{i=1}^{n_{eas}} \delta\varphi_i \mathbf{E}_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die Berechnung der Variation der inneren Energie wird aus Effizienzgründen mit dem Kirchhoffschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  vorgenommen. Diese Darstellung von  $\delta\Pi_{int}$  besitzt Vorteile gegenüber der Darstellung in der Referenzkonfiguration: die Diskretisierung der Operatoren  $\delta\mathbf{b}$  und  $\delta\mathbf{e}$  (s.u.) führt auf schwach besetzte Matrizen.

$$\delta\Pi_{int} = \int_{V_{ref}} 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \frac{1}{2} \delta\bar{\mathbf{C}} dV_{ref} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^{-1} dV_{ref} \\
&= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \underbrace{(\delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}_c \mathbf{E}) \bar{\mathbf{F}}^{-1}}_{=: \delta \mathbf{b}} dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \underbrace{\mathbf{F}_c \delta \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}}^{-1}}_{=: \delta \mathbf{e}} dV_{ref}
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Variationen  $\delta \mathbf{E}$  und  $\delta \vec{\mathbf{u}}$  entstehen zwei Systeme nichtlinearer Gleichungen, von denen das erste auf Systemebene und das zweite auf Elementebene, d.h. in jedem Element einzeln, erfüllt werden muß.

$$\boxed{
\begin{aligned}
\sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_{ref}^e} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} dV_{ref}^e + \delta \Pi_{ext}(\vec{\mathbf{u}}) &= 0 \\
\int_{V_{ref}^e} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{e} dV_{ref}^e &= 0 \quad e = 1..n_{elm}
\end{aligned}
} \quad (4.15)$$

Die Diskretisierung des Operators  $\delta \mathbf{b}$  entsteht durch Diskretisierung von  $\delta \mathbf{F}$  und seines konstanten Anteils  $\delta \mathbf{F}_c$ .

$$\delta \mathbf{F} = \text{GRAD}(\delta \vec{\mathbf{u}}) = \delta \vec{\mathbf{u}}_i \otimes \text{GRAD}(N^i) \quad \delta \vec{\mathbf{u}}_i := (\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i)^T \quad (4.16)$$

Setzt man den obigen Ausdruck in die Definition von  $\delta \mathbf{b}$  ein, ergibt sich ein Operator, der dieselbe Struktur wie  $\text{grad}(\delta \vec{\mathbf{u}})$  besitzt.

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{b} &= \sum_{i=1}^8 (\delta \vec{\mathbf{u}}_i \otimes \text{GRAD}(N^i) + \delta \vec{\mathbf{u}}_i \otimes \text{GRAD}_c(N^i) \mathbf{E}) \bar{\mathbf{F}}^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^8 \delta \vec{\mathbf{u}}_i \otimes \bar{\mathbf{F}}^{-T} \text{GRAD}(N^i) + \delta \vec{\mathbf{u}}_i \otimes \bar{\mathbf{F}}^{-T} \mathbf{E}^T \text{GRAD}_c(N^i)
\end{aligned} \quad (4.17)$$

Mit der Definition des modifizierten Gradientenoperators,

$$\boxed{\bar{\nabla} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} (\text{GRAD} + \mathbf{E}^T \text{GRAD}_c)} \quad (4.18)$$

kann  $\delta \mathbf{b}$  in der folgenden, kompakten Weise dargestellt werden:

$$\delta \mathbf{b} = \sum_{i=1}^8 \delta \vec{\mathbf{u}}_i \otimes \bar{\nabla} N^i = \sum_{i=1}^8 \delta \mathbf{b}_i \quad .$$

$$\delta \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} \delta u_i \bar{\nabla}_1 N^i & \delta u_i \bar{\nabla}_2 N^i & \delta u_i \bar{\nabla}_3 N^i \\ \delta v_i \bar{\nabla}_1 N^i & \delta v_i \bar{\nabla}_2 N^i & \delta v_i \bar{\nabla}_3 N^i \\ \delta w_i \bar{\nabla}_1 N^i & \delta w_i \bar{\nabla}_2 N^i & \delta w_i \bar{\nabla}_3 N^i \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Wegen der Symmetrie des Kirchhoffschen Spannungstensors liefert nur der symmetrische Anteil von  $\delta \mathbf{b}$  einen Beitrag zum Skalarprodukt in (4.15a). Beim Übergang zur Matrix-Vektor Darstellung mit  $\delta \bar{\mathbf{u}}_e^T := (\delta \bar{\mathbf{u}}_1 \dots \delta \bar{\mathbf{u}}_8)$

$$\int_{V_{ref}^e} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} dV_{ref}^e = \delta \bar{\mathbf{u}}_e^T \int_{V_{ref}^e} \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\boldsymbol{\tau}} dV_{ref}^e = \delta \bar{\mathbf{u}}_e^T \bar{\mathbf{R}}_{disp}^e \quad (4.20)$$

ergibt sich dann die sog.  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix, die aus den acht  $6 \times 3$  Blockmatrizen  $\bar{\mathbf{B}}_i$  aufgebaut ist.

$$\bar{\mathbf{B}}_i^T = \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_1 N^i & 0 & 0 & \bar{\nabla}_2 N^i & \bar{\nabla}_3 N^i & 0 \\ 0 & \bar{\nabla}_2 N^i & 0 & \bar{\nabla}_1 N^i & 0 & \bar{\nabla}_3 N^i \\ 0 & 0 & \bar{\nabla}_3 N^i & 0 & \bar{\nabla}_1 N^i & \bar{\nabla}_2 N^i \end{bmatrix} \quad i = 1..8 \quad (4.21)$$

Die Diskretisierung von  $\delta \mathbf{e}$  in (4.15b) entsteht durch die Diskretisierung des Tensors  $\mathbf{E}$ :

$$\delta \mathbf{e} = \sum_{i=1}^{n_{eas}} \mathbf{F}_c \delta \varphi_i \mathbf{E}^i \bar{\mathbf{F}}^{-1} = \sum_{i=1}^{n_{eas}} \delta \varphi_i \bar{\mathbf{E}}^i, \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{E}}^i := \mathbf{F}_c \mathbf{E}^i \bar{\mathbf{F}}^{-1} \quad (4.22)$$

Beim Übergang zur FE-üblichen Matrix-Vektorschreibweise und unter Beachtung der Symmetrie von  $\boldsymbol{\tau}$ , wird der Operator  $\delta \mathbf{e}$  durch den Vektor  $\delta \varphi_i \bar{\mathbf{e}}_i$  ersetzt.

$$\int_{V_{ref}^e} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{e} dV_{ref}^e = \delta \varphi_i \int_{V_{ref}^e} \bar{\mathbf{e}}_i^T \bar{\boldsymbol{\tau}} dV_{ref}^e = \delta \bar{\boldsymbol{\varphi}}_e^T \bar{\mathbf{R}}_{eas}^e \quad (4.23)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i^T = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11}^i & \bar{E}_{22}^i & \bar{E}_{33}^i & \bar{E}_{12}^i + \bar{E}_{21}^i & \bar{E}_{13}^i + \bar{E}_{31}^i & \bar{E}_{23}^i + \bar{E}_{32}^i \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Das Gleichungssystem in (4.15) muß für beliebige  $\delta \bar{\boldsymbol{\varphi}}_e$  und  $\delta \bar{\mathbf{u}}_e$  erfüllt sein. Nach der Diskretisierung von  $\delta \Pi_{ext}$ , die direkt zum Knotenvektor der äußeren Kräfte  $\bar{\mathbf{F}}_{ext}$  führt, ergibt sich das folgende diskrete Gleichungssystem.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \bar{\mathbf{R}}_{disp}^e &= \bar{\mathbf{F}}_{ext} \\ \bar{\mathbf{R}}_{eas}^e &= \bar{\mathbf{0}} \quad e = 1..n_{elm} \end{array}} \quad (4.25)$$

$\mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}}$  in Gleichung (4.25a) ist der übliche FE-Assemblierungsoperator.

Werden nur die EAS-Parameter  $\varphi_1 \dots \varphi_9$  berücksichtigt, reduziert sich  $\mathbf{E}_\xi^{SAT}$  auf  $\mathbf{E}_\xi^{TBW}$ .

$$\mathbf{E}_\xi^{TBW} = \begin{bmatrix} \varphi_1 r & \varphi_4 s & \varphi_7 t \\ \varphi_2 r & \varphi_5 s & \varphi_8 t \\ \varphi_3 r & \varphi_6 s & \varphi_9 t \end{bmatrix} = \vec{\beta}_1 \otimes \nabla_\xi \tilde{N}^1 + \vec{\beta}_2 \otimes \nabla_\xi \tilde{N}^2 + \vec{\beta}_3 \otimes \nabla_\xi \tilde{N}^3 \quad (4.26)$$

Die Möglichkeit die linearen Terme in  $\mathbf{E}_\xi^{TBW}$  als Ableitungen der sog. inkompatiblen Formfunktionen

$$\tilde{N}^1 = 0.5 (r^2 \Leftrightarrow 1), \quad \tilde{N}^2 = 0.5 (s^2 \Leftrightarrow 1), \quad \tilde{N}^3 = 0.5 (t^2 \Leftrightarrow 1)$$

nach den isoparametrischen Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$  darzustellen, hat die Konsequenz, daß  $\delta \mathbf{e}$  dieselbe Struktur besitzt wie  $\delta \mathbf{b}$ . Die Möglichkeit dieser Darstellung von  $\delta \mathbf{e}$ , die für eine effiziente Programmierung genutzt werden sollte, ist nach Berechnung von

$$\delta \mathbf{E} = \frac{j_c}{j} \mathbf{J}_c \delta \mathbf{E}_\xi \mathbf{J}_c^{-1} = \left( \frac{j_c}{j} \mathbf{J}_c \delta \vec{\beta}_i \right) \otimes \mathbf{J}_c^{-T} \nabla_\xi \tilde{N}^i \quad (4.27)$$

erkennbar.

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{F}_c \delta \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}}^{-1} = \left( \mathbf{F}_c \frac{j_c}{j} \mathbf{J}_c \delta \vec{\beta}_i \right) \otimes \bar{\mathbf{F}}^{-T} \mathbf{J}_c^{-T} \nabla_\xi \tilde{N}^i = \vec{\alpha}_i \otimes \bar{\nabla}_{tbw} \tilde{N}^i \quad (4.28)$$

Somit ergibt sich für den Residuenvektor  $\vec{\mathbf{R}}_{eas}^e$ :

$$\vec{\mathbf{R}}_{eas}^e = \int_{V_{ref}^e} \mathbf{G}^T \vec{\tau} dV_{ref}^e, \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{6 \times 9} \quad (4.29)$$

Die Matrix  $\mathbf{G}$  besitzt die gleiche Struktur und schwache Besetzung wie die  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix. Dieser rechentechnische Vorteil zeichnet das klassische 8-Knoten Element mit inkompatiblen quadratischen Ansatzfunktionen von *Taylor, Beresford, Wilson* [1976] gegenüber anderen EAS-Elementen aus.

## 4.4 Linearisierung der nichtlinearen Gleichungen

Werden Newton-Verfahren zur Lösung des diskreten, nichtlinearen Gleichungssystems (4.25) verwendet, ist es notwendig, die Elementvektoren  $\vec{\mathbf{R}}_{eas}^e$  und  $\vec{\mathbf{R}}_{disp}^e$  um einen durch  $\vec{\varphi}_e$  und  $\vec{\mathbf{u}}_e$  bestimmten Zustand zu linearisieren. Die Ableitungen dieser Vektoren nach den Knotenverschiebungen sind die Steifigkeitsmatrizen. Eine andere Möglichkeit, die Steifigkeitsmatrizen zu berechnen, besteht darin, zuerst die kontinuierlichen Ausdrücke in (4.15)

zu linearisieren und erst anschließend zu diskretisieren. Die letztere wird im folgenden dargestellt.

$$\begin{aligned}
\Delta \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} \, dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \Delta \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} \, dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \Delta \mathbf{b}^T \delta \mathbf{b} \, dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \Delta \mathbf{e} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} \, dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \Delta \mathbf{e}^T \circ \delta \mathbf{F}_c \mathbf{F}_c^{-1} \, dV_{ref}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Das objektive Inkrement der Kirchhoff Spannungen  $\Delta \boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{S} \bar{\mathbf{F}}^T$  ist linear abhängig von den Inkrementen  $\Delta \mathbf{b}$  und  $\Delta \mathbf{e}$ .

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \mathcal{C}_t (\Delta \mathbf{b} + \Delta \mathbf{e}) \tag{4.31}$$

Der Tensor vierter Stufe  $\mathcal{C}_t$  ist der zum hyperelastischen Materialmodell gehörige Werkstofftensor.

$$\begin{aligned}
\Delta \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} \, dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{b} \circ \mathcal{C}_t \Delta \mathbf{b} \, dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{b} \circ \mathcal{C}_t \Delta \mathbf{e} \, dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \Delta \mathbf{b}^T \delta \mathbf{b} \, dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} [\Delta \mathbf{e} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\tau} \Delta \mathbf{e}^T \circ \text{grad}_c(\delta \vec{\mathbf{u}})] \, dV_{ref}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Das Inkrement der zweiten Gleichung in (4.15) ist durch den folgenden Ausdruck gegeben, der dieselbe Struktur wie (4.32) besitzt.

$$\begin{aligned}
\Delta \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{e} \, dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{e} \circ \mathcal{C}_t \Delta \mathbf{e} \, dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{e} \circ \mathcal{C}_t \Delta \mathbf{b} \, dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \Delta \mathbf{e}^T \delta \mathbf{e} \, dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} [\Delta \mathbf{b} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \mathbf{e} + \boldsymbol{\tau} \delta \mathbf{e}^T \circ \text{grad}_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})] \, dV_{ref}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die Diskretisierung der Terme in (4.32) und (4.33) führt direkt zu den gesuchten Steifigkeitsmatrizen. Diese können unter Beachtung der allgemeinen Formel

$$\mathbf{A} \circ \nabla(\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{A} \circ [\vec{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla N^i] = \vec{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{A} \nabla N^i \tag{4.34}$$

nach *Armoro* [1996] in einer übersichtlichen und kompakten Form dargestellt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden nur Blockmatrizen angegeben, aus denen sich die jeweiligen Elementmatrizen zusammensetzen. Auf den Index  $e$  an den Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{\varphi,\varphi}$ ,  $\mathbf{K}_{u,\varphi}$  und  $\mathbf{K}_{u,u}$  wird verzichtet, da diese Matrizen nur im Element definiert sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\varphi,\varphi}^{ij} &= \int_{V_{ref}} \vec{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{C}_t \vec{\mathbf{e}}_j dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \bar{\mathbf{E}}_i \boldsymbol{\tau} \circ \bar{\mathbf{E}}_j dV_{ref} \quad (i, j = 1..n_{eas}) \\ \mathbf{K}_{u,\varphi}^{ij} &= \int_{V_{ref}} \bar{\mathbf{E}}_j \boldsymbol{\tau} \bar{\nabla} N^i dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \bar{\mathbf{E}}_j^T \nabla_c N^i dV_{ref} \quad (i = 1..8, j = 1..n_{eas}) \\ \mathbf{K}_{u,u}^{ij} &= \int_{V_{ref}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_t \mathbf{B}_j dV_{ref} + \left[ \int_{V_{ref}} \bar{\nabla} N^i \circ \boldsymbol{\tau} \bar{\nabla} N^j dV_{ref} \right] \mathbf{1} \quad (i, j = 1..8) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Taylorreihenentwicklung der Gleichung (4.25b) kann zur Elimination der inneren Parameter  $\Delta \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e$  auf Elementebene mittels statischer Kondensation benutzt werden.

$$\mathbf{K}_{u,\varphi}^T \Delta \vec{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_{\varphi,\varphi} \Delta \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e = \vec{\mathbf{R}}_{eas}^e \implies \Delta \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e = \mathbf{K}_{\varphi,\varphi}^{-1} (\vec{\mathbf{R}}_{eas}^e \Leftrightarrow \mathbf{K}_{u,\varphi}^T \Delta \vec{\mathbf{u}}_e) \quad (4.36)$$

Die Folge dieser sog. statischen Kondensation ist, daß die Dimension der globalen Steifigkeitsmatrix durch die Anzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade bestimmt ist. Die globale Steifigkeitsmatrix und der globale Kraftvektor sind aus den effektiven Elementsteifigkeitsmatrizen bzw. den effektiven inneren Elementkraftvektoren aufgebaut.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{K}_e = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\mathbf{K}_{u,u} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{u,\varphi} \mathbf{K}_{\varphi,\varphi}^{-1} \mathbf{K}_{u,\varphi}^T] \\ \vec{\mathbf{F}}_{int} &= \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} \vec{\mathbf{F}}_{int}^e = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{elm}} [\vec{\mathbf{R}}_{disp}^e \Leftrightarrow \mathbf{K}_{u,\varphi} \mathbf{K}_{\varphi,\varphi}^{-1} \vec{\mathbf{R}}_{eas}^e] \end{aligned}} \quad (4.37)$$

Innerhalb eines Newton-Raphson Verfahrens kann die Berechnung der inneren Elementparameter nach der  $i$ -ten Iteration  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e^{(i+1)}$  auf zwei verschiedene Weisen erfolgen. In der ersten Methode wird nach der Berechnung eines neuen Verschiebungsinkrementes (durch Lösung des globalen linearen Gleichungssystems) für jedes Element ein  $\Delta \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e^{(i)}$  und damit dann  $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_e^{(i+1)} = \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e^{(i)} + \Delta \vec{\boldsymbol{\varphi}}_e^{(i)}$  bestimmt (auf neudeutsch: ein sog. Update vollzogen). Der Nachteil bei diesem Vorgehen besteht darin, daß die Matrizen  $\mathbf{K}_{u,\varphi}^{(i)}$ ,  $\mathbf{K}_{\varphi,\varphi}^{(i)}$  und der Vektor  $\vec{\mathbf{R}}_{eas}^{(i)}$  aus der vorhergehenden  $i$ -ten Iteration neu berechnet werden müssen. Soll die dafür notwendige Rechenzeit eingespart werden, so müßten die entsprechenden Matrizen und Vektoren eines jeden Elementes gespeichert werden.

$\vec{\varphi}_e^{(i+1)}$  kann aber auch durch eine lokale Iteration bestimmt werden. Für unveränderliches  $\vec{u}_e^{(i+1)}$  ist die Lösung  $\vec{\varphi}_e^{(i+1)}$  der Gleichung

$$\vec{\mathbf{R}}_{eas}^e(\vec{\varphi}_e, \vec{u}_e^{(i+1)}) = \vec{\mathbf{0}} \quad (4.38)$$

gesucht. Das erstmals von *Simo, Armero, Taylor* [1993] vorgeschlagene Verfahren kann nur dann wirtschaftlich sein, wenn die Anzahl der Iterationen zur Bestimmung des Lösungsvektors so gering wie möglich ist. Diese hängt aber vom Startvektor ab. Es ist daher vorteilhaft, als Startwert  $\vec{\varphi}_e^{(i)}$  zu verwenden.

Die vorstehend geschilderten zwei Verfahrensvarianten werden auf den folgenden beiden Seiten in „Flußdiagrammen“ in übersichtlicher Form dargestellt. Beim Leser und möglichen Anwender von nichtlinearen EAS-Elementen soll dadurch auch ein Überblick über den enormen Aufwand gegeben werden, der mit dem Einsatz der EAS-Methode verbunden ist. Die Vektoren und Matrizen in den beiden Schaubildern sind ausschließlich Elementgrößen. Auf den Index  $e$  kann deshalb verzichtet werden.

**Klassisches Verfahren zur Bestimmung  
der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementkraftvektors  
für EAS-Elemente**

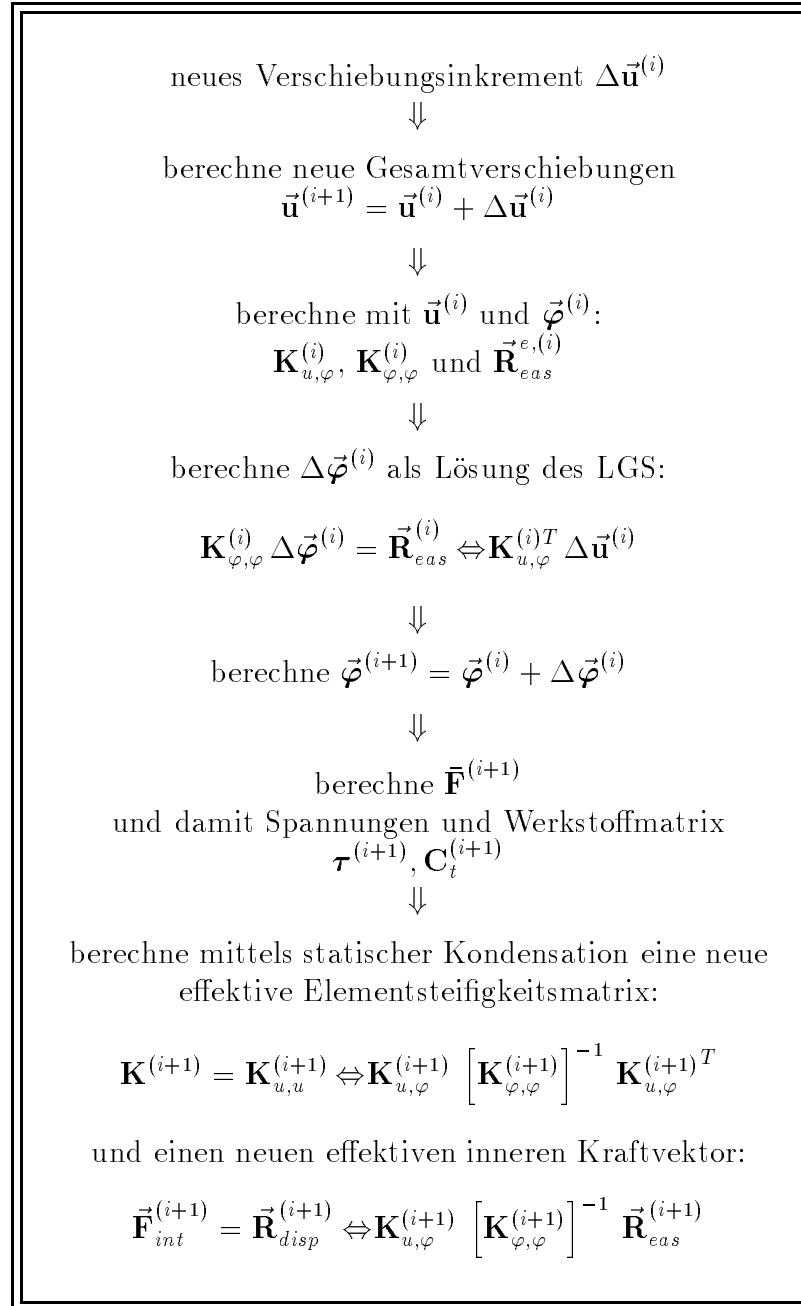


Tabelle 4.1



## Verfahren mit lokaler Berechnung der EAS-Parameter

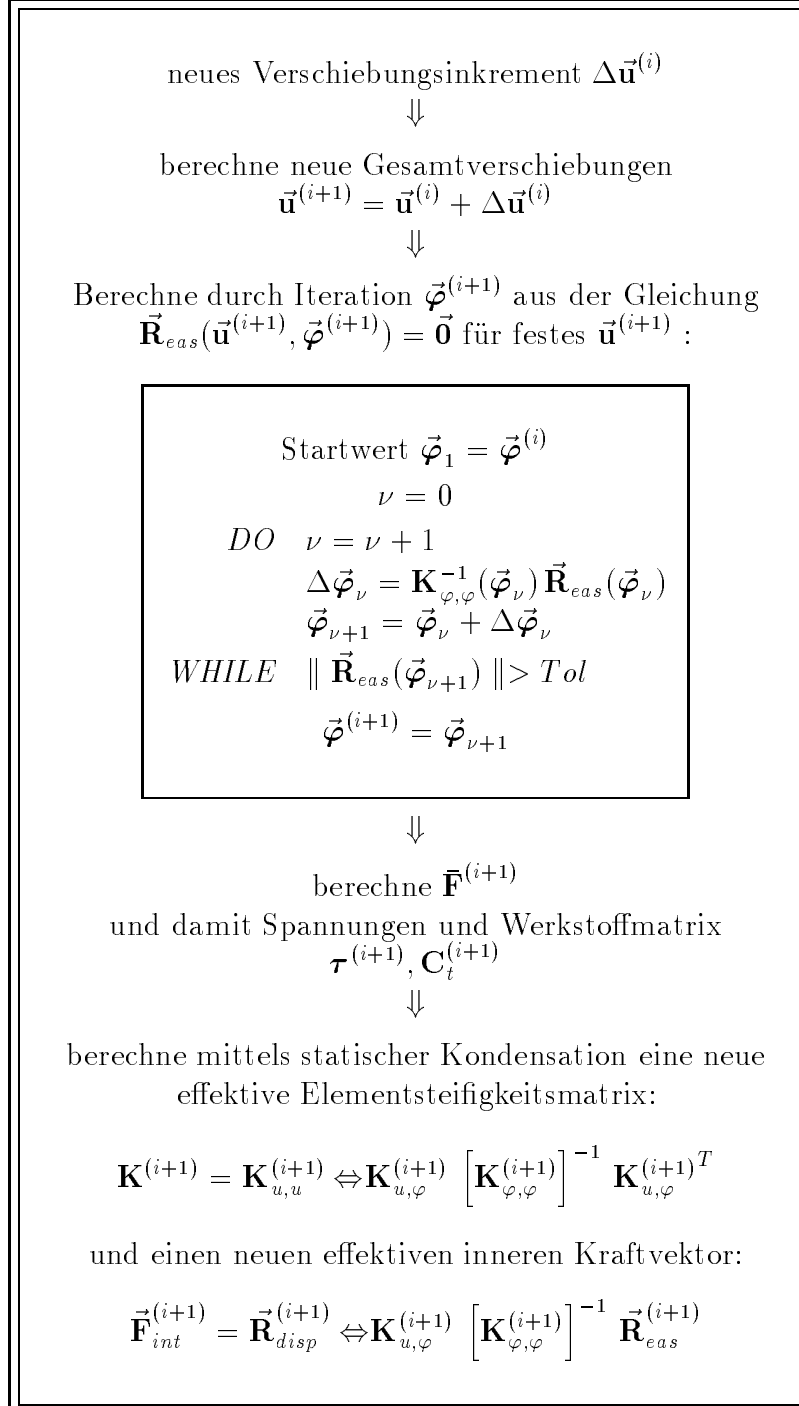


Tabelle 4.2

# Kapitel 5

## $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode

Die Diskussion der Vor- und Nachteile der EAS-Methode im Zusammenhang mit großen Verzerrungen hat gezeigt, daß einzig durch die Modifikation der Determinante des  $\mathbf{F}$ -Tensors der klassischen Verschiebungsmethode ein volumetrisch versteifungsfreies 8-Knoten Element gewährleistet werden kann (siehe Gleichung (4.10) in Abschnitt 4.2). Dies bedeutet aber nicht, daß Simulationen mit EAS-Elementen bei quasi-inkompressiblen Werkstoffen und starken Deformationen vollkommen wertlos sind. In vielen Fällen, dokumentiert durch Berechnungen in der Fachliteratur, kann man mit Hilfe der EAS-Methode zu zuverlässigen Ergebnissen gelangen. Dennoch kann das Auftreten von Elementversteifungen in einer Berechnung nie mit Sicherheit ausgeschlossen werden. Diese Sicherheit bei Simulationen mit inkompressiblen Materialien bieten alleine die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente, die im folgenden näher untersucht werden sollen.

### 5.1 Grundlagen

Das Konzept der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode beruht im Gegensatz zur EAS-Methode in Gleichung (4.1) auf der Möglichkeit den konventionellen Deformationstensor  $\mathbf{F}$  als Produkt aus seinem isochoren Anteil  $\mathbf{F}_{iso}$ , charakterisiert durch  $\det(\mathbf{F}_{iso}) \equiv 1$ , und aus dem volumetrischen und deshalb kugelsymmetrischen Anteil  $\mathbf{F}_{vol}$  darzustellen. Die Determinante des letzteren Operators ist gleich der Determinante des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{iso} \bullet \mathbf{F}_{vol} \\ \mathbf{F} &= [\det(\mathbf{F})]^{-1/3} \mathbf{F} \bullet [\det(\mathbf{F})]^{+1/3} \mathbf{1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da in diesem Abschnitt ausschließlich Strategien untersucht werden, die zur Unterdrückung oder Abschwächung des gerade für 3D Elemente problematischen „incompressibility-locking“ eingesetzt werden, wird der Operator  $\mathbf{F}_{iso}$  nicht verändert. Die Modifikation beschränkt sich daher auf den die volumetrischen Deformationen beschreibenden Operator  $\mathbf{F}_{vol}$ .

Die Ursache der Versteifung des Verschiebungselementes liegt in der punktweisen Auswertung der i.a. ortsabhängigen Determinante  $J := \det(\mathbf{F})$ . Diese Determinante muß, um zu einer versteifungsfreien Elementformulierung zu gelangen, durch eine im gesamten Element konstante Dilatation  $\Theta$  ersetzt werden. Die Ortsunabhängigkeit von  $\Theta$  ist für den 8-Knoten Hexaeder mit trilinearen Ansatzfunktionen zur Erzeugung versteifungsfreier Elemente zwingend. In Elementen mit höherer Ansatzordnung kann die Dilation eine ortsabhängige Funktion sein, was jedoch eine statische Kondensation der inneren Elementparameter von  $\Theta$  bei der Berechnung des Kraftvektors und der Tangentensteifigkeitsmatrix zur Folge hat (siehe *Simo, Taylor* [1991] und *Simo et al.* [1985]).

Der Austausch von  $J$  gegen  $\Theta$  in  $\mathbf{F}_{vol}$  führt zu einem neuen Operator  $\bar{\mathbf{F}}_{vol}$  und mit diesem zu dem eigentlich gesuchten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator. Die Determinante von  $\bar{\mathbf{F}}$  ist die zunächst noch unbekannte Größe  $\Theta$  (s.u.).

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{iso} \bullet \bar{\mathbf{F}}_{vol} \\ \underbrace{J^{-1/3} \mathbf{F}} \bullet \underbrace{\Theta^{1/3} \mathbf{1}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{iso} \bullet \bar{\mathbf{F}}_{vol} = \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{1/3} \mathbf{F} \quad (5.2)$$

Der nun eingeführte  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator bzw.  $\Theta$  können aber nicht beliebig gewählt werden. Neben der Ortsunabhängigkeit beim trilinearen Element muß die Dilatation  $\Theta$  aus physikalischen Gründen und aus Effizienzgründen weitere Anforderungen erfüllen:

- $\Theta$  sollte explizit von den Verschiebungen abhängen, um eine aufwendige Berechnung zu vermeiden.
- Die Bedingung  $\Theta > 0$  muß für alle physikalisch möglichen Verschiebungsfelder  $\vec{\mathbf{u}}$  erfüllt werden. Die Einhaltung dieser Bedingung ist jedoch nicht hinreichend dafür, daß keine sog. „hourglass“ Instabilitäten in einer Simulation aktiviert werden können. Diese durch den Austausch von  $J$  gegen  $\Theta$  bedingte Instabilität wird durch einen Rangabfall in der Elementsteifigkeitsmatrix verursacht und genauer in Abschnitt 8 untersucht.
- Der sog. „Patch-Test“ sollte erfüllt werden, d.h. beliebige homogene Deformations- bzw. Spannungszustände sollten exakt dargestellt werden. Diese Bedingung wird für eine spezielle  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung, die wegen  $\Theta = \hat{\Theta}(\vec{\mathbf{u}})$  auch als eine verallgemeinerte Verschiebungsmethode interpretiert werden kann, durch einen Vergleich mit der konventionellen Verschiebungsmethode überprüft (siehe Abschnitt 5.2).

## 5.2 Konvergenzbedingungen

Von einer im streng mathematischen Sinne konvergenten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung muß gefordert werden, daß beliebige **homogene** Spannungs- und Deformationszustände exakt dargestellt werden. Diese Bedingung muß für beliebige Referenzgeometrien des Elementes

erfüllt werden. Die Frage ob, ein  $\bar{\mathbf{F}}$ -Element diesen Anforderungen genügt, kann durch Vergleich mit dem konventionellen Verschiebungselement beantwortet werden. Das isoparametrische 8-Knoten Verschiebungselement kann aufgrund seiner Konstruktion lineare Verschiebungsfelder

$$\vec{\mathbf{u}}_{\text{lin}} = \vec{\mathbf{a}}_0 + \vec{\mathbf{a}}_1 x + \vec{\mathbf{a}}_2 y + \vec{\mathbf{a}}_3 z \quad (5.3)$$

ohne Fehler darstellen. Der zugehörige Deformationsgradient ist im Element konstant,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_c \quad (5.4)$$

so daß die aus den Konstitutivgleichungen berechneten Ersten Piola–Kirchhoff– bzw. die Kirchhoff–Spannungen im Element ebenfalls homogen sind.

$$\mathbf{P}_c = \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}_c} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\tau}_c = 2 \mathbf{F} \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \right|_{\mathbf{F}_c} \quad (5.5)$$

Der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Deformationsoperator muß bei einem vorgegebenen linearen Verschiebungsfeld (5.3) konstant und gleich dem  $\mathbf{F}$ -Deformationstensor in (5.4) sein. Eine Differenz in den Werten von  $\bar{\mathbf{F}}$  und  $\mathbf{F}$  für das Verschiebungsfeld (5.3) würde ansonsten aufgrund der Werkstoffgesetze zu unterschiedlichen Spannungswerten führen. Die Gleichheit der beiden Operatoren für ein lineares Verschiebungsfeld ist die erste Konvergenzbedingung. Aufgrund der Definition des  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators ist diese Forderung äquivalent mit der Gleichheit der Dilatationen.

$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_c \quad \Longleftrightarrow \quad \Theta = J_c \quad (\text{für } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_{\text{lin}})$

(5.6)

$\bar{\mathbf{F}}$  bzw. seine Variation müssen noch eine weitere Bedingung erfüllen, die in der Literatur oft keine Beachtung findet: Bei einem vorgegebenen homogenen Spannungsfeld müssen die Element–Kraftvektoren der beiden Methoden identisch sein. Äquivalent dazu ist die Forderung nach Übereinstimmung der Ausdrücke von  $\delta \Pi_{\text{int}}$  in beiden Elementformulierungen für einen konstanten Spannungstensor  $\mathbf{P}_c$ .

$$\int_{V_{\text{ref}}} \mathbf{P}_c \circ \delta \bar{\mathbf{F}} dV_{\text{ref}} = \int_{V_{\text{ref}}} \mathbf{P}_c \circ \delta \mathbf{F} dV_{\text{ref}}, \quad \forall \mathbf{P}_c \in \mathcal{R}^{3 \times 3} \quad (5.7)$$

Diese Gleichung kann aber nur dann für beliebige konstante Tensoren  $\mathbf{P}_c$  erfüllt werden, wenn für die Variationen der Deformationsoperatoren die folgende Identität gilt:

$$\boxed{\int_{V_{ref}} \delta \bar{\mathbf{F}} dV_{ref} \equiv \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{F} dV_{ref} \quad .} \quad (5.8)$$

Wegen

$$\delta \bar{\mathbf{F}} = \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{1/3} \delta \mathbf{F} + \frac{1}{3} \left( \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \bar{\mathbf{F}} \quad (5.9)$$

und unter Beachtung von (5.6), ist die Bedingung (5.8) äquivalent zu der Forderung

$$\int_{V_{ref}} \left( \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) dV_{ref} = 0 \quad . \quad (5.10)$$

In der „Eulerschen“ Darstellung und nach der Diskretisierung der Verschiebungen und Deformationen, kann (5.8) auch als eine Bedingungsgleichung für die sog.  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix interpretiert werden (s.u.).

$$\int_{V_{ref}} \bar{\mathbf{B}} dV_{ref} \equiv \int_{V_{ref}} \mathbf{B} dV_{ref} \quad (5.11)$$

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die zwei Kriterien (5.6) und (5.8) darüber entscheiden, ob eine konkrete  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elementformulierung bei zunehmender Netzverfeinerung konvergiert. Die Verletzung eines der beiden Kriterien hat zur Folge, daß der sog. Patch-Test nicht erfüllt wird.

$$\begin{aligned} \int_{V_{ref}} \delta \bar{\mathbf{F}} dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{F} dV_{ref} \quad \forall \quad \delta \vec{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{u}}_{lin}) &= \mathbf{F}(\vec{\mathbf{u}}_{lin}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.3 Der innere Kraftvektor

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich 8-Knoten Hexaeder für hyperelastische Materialgesetze untersucht. Diese zeichnen sich durch die Existenz einer Verzerrungsenergiedichte  $W(\mathbf{C})$  als Funktion des rechten Cauchy-Green Tensors  $\mathbf{C}$  aus. Die Zweiten

Piola-Kirchhoff Spannungen  $\mathbf{S}$  und die Kirchhoff-Spannungen  $\boldsymbol{\tau}$  berechnen sich durch Ableitung der elastischen Energiedichte nach  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad , \quad \boldsymbol{\tau} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad . \quad (5.13)$$

In der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung werden die Energiedichte  $W$  und die Spannungen mit dem Operator  $\bar{\mathbf{C}} := \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$  berechnet, statt mit dem konventionellen rechten Cauchy-Green Tensor  $\mathbf{C}$  der Verschiebungsmethode.

Ausgangspunkt für die Herleitung des Element-Kraftvektors und der Element-Tangentensteifigkeitsmatrix ist die Variation des Potentials der inneren Kräfte  $\Pi_{int}$ . Die Berechnung dieser Variation

$$\delta \Pi_{int} = \delta \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} = \int_{V_{ref}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \delta \bar{\mathbf{C}} dV_{ref} \quad (5.14)$$

setzt die Kenntnis der Variation des Operators  $\bar{\mathbf{C}} := \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$  voraus.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \mathbf{C} \\ \Rightarrow \delta \bar{\mathbf{C}} &= \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \delta \mathbf{C} + \frac{2}{3} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \left[ \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right] \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$\delta \bar{\mathbf{C}}$  enthält sowohl die Variation von  $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{C} &= (\delta \mathbf{F})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T (\delta \mathbf{F}) \\ &= \mathbf{F}^T (\delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T (\delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T \boldsymbol{\nabla}^T (\delta \vec{\mathbf{u}}) \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\nabla} (\delta \vec{\mathbf{u}}) \mathbf{F} \\ &= 2 \mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.16)$$

als auch die Variation der Determinante  $J$

$$\frac{1}{J} \delta J = \frac{1}{J} J \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} \quad . \quad (5.17)$$

Der in den Gleichungen (5.16) und (5.17) auftretende Tensor

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} := \frac{1}{2} [\text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) + \text{grad}(\delta \vec{\mathbf{u}})] \quad (5.18)$$

ist der symmetrische Anteil des auf die Momentankonfiguration bezogenen Gradienten der Verschiebungsvariation. Setzt man die Ausdrücke für  $\delta J$  und  $\delta \mathbf{C}$  in Gleichung (5.15) ein,

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{\mathbf{C}} &= 2 \bar{\mathbf{F}}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} \bar{\mathbf{F}} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) + \frac{2 \delta \Theta}{3 \Theta} \bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} \\
 &= 2 \bar{\mathbf{F}}^T (\delta \boldsymbol{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \text{sp}[\delta \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{1}) \bar{\mathbf{F}} + \frac{2 \delta \Theta}{3 \Theta} \bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} \\
 &= 2 \bar{\mathbf{F}}^T \text{dev}[\delta \boldsymbol{\epsilon}] \bar{\mathbf{F}} + \frac{2 \delta \Theta}{3 \Theta} \bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} \\
 &= 2 \bar{\mathbf{F}}^T \underbrace{(\text{dev}[\delta \boldsymbol{\epsilon}] + \frac{\delta \Theta}{3 \Theta} \mathbf{1})}_{= \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \bar{\mathbf{F}}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

ergibt sich nach Einführung der Größe  $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  ein zu  $\delta \mathbf{C}$  vollkommen analoger Ausdruck für die gesuchte Variation von  $\bar{\mathbf{C}}$ .

$$\delta \bar{\mathbf{C}} = 2 \bar{\mathbf{F}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \bar{\mathbf{F}} \tag{5.20}$$

Unter Beachtung der Identität für das Skalarprodukt von Tensoren zweiter Stufe

$$\mathbf{X} \circ \mathbf{B}^T \mathbf{Y} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{B}^T \circ \mathbf{Y}$$

und der Definition des Kirchhoffschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$ , ergibt sich nach Einsetzen von (5.20) in (5.14) der nachfolgende Ausdruck für die Variation der Formänderungsenergie.

$$\delta \Pi_{int} = \int_{V_{ref}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ 2 \bar{\mathbf{F}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \bar{\mathbf{F}} dV_{ref} = \int_{V_{ref}} 2 \bar{\mathbf{F}} \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}}}_{=: \boldsymbol{\tau}} \bar{\mathbf{F}}^T \circ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} \tag{5.21}$$

Die Struktur von  $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  und die Orthogonalitätsbeziehung  $\text{dev} \boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1} = 0$  ermöglicht die Darstellung von  $\delta \Pi_{int}$  als Summe eines Terms, der auch in der konventionellen Verschiebungsformulierung enthalten ist, und eines von der Dilatation  $\Theta$  abhängigen Extraterms.

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{int} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} \\
 &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \text{dev}[\delta \boldsymbol{\epsilon}] dV_{ref} + \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \frac{\delta \Theta}{3 \Theta} dV_{ref} \\
 &= \int_{V_{ref}} \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] \circ \text{dev}[\delta \boldsymbol{\epsilon}] dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \text{sp}[\boldsymbol{\tau}] \frac{\delta \Theta}{3 \Theta} dV_{ref}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

**Anmerkung:**

Das Integrationsgebiet in der Integration des Skalarproduktes  $\boldsymbol{\tau} \circ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  in den obigen Gleichungen kann selbstverständlich auch das aktuelle Elementvolumen  $V_t$  sein. Das Volumenelement  $dV_{ref}$  muß dann nur durch das Volumenelement  $dV_t = J dV_{ref}$  ersetzt werden.

$$\int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} = \int_{V_t} \frac{\boldsymbol{\tau}}{J} \circ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_t \quad (5.23)$$

Der Tensor  $\boldsymbol{\tau}/J$  darf dabei nicht mit dem Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  verwechselt werden. In einer konsistenten Formulierung ist  $\boldsymbol{\sigma}$  eine Funktion alleine von  $\bar{\mathbf{F}}$ , d.h.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\det \bar{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T = \frac{2}{\Theta} \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T \quad . \quad (5.24)$$

**5.3.1 Diskretisierung**

Nach der Diskretisierung des Verschiebungsfeldes  $\vec{\mathbf{u}}$  mittels der Element-Knotenverschiebungen, zusammengefaßt im Vektor  $\vec{\mathbf{u}}_e \in \mathcal{R}^{24}$ , und der konventionellen Element-Formfunktionen des 8-Knoten Hexaeders  $N^i$  ( $i = 1 \dots 8$ )

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N^i & 0 & 0 \\ 0 & N^i & 0 \\ 0 & 0 & N^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{N}^i \vec{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N} \vec{\mathbf{u}}_e \quad (5.25)$$

erhält man die Diskretisierung des symmetrischen Operators  $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ , der aufgrund seiner Definition sowohl vom Verschiebungsfeld und dessen Variation abhängt. Die sechs unabhängigen Komponenten des diskretisierten Operators  $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  werden in einem Vektor

$$\delta \vec{\boldsymbol{\epsilon}} = [\delta \bar{\epsilon}_{11}, \delta \bar{\epsilon}_{22}, \delta \bar{\epsilon}_{33}, 2 \delta \bar{\epsilon}_{12}, 2 \delta \bar{\epsilon}_{13}, 2 \delta \bar{\epsilon}_{23}]^T \quad (5.26)$$

zusammengefaßt. Der Vektor  $\delta \vec{\boldsymbol{\epsilon}}$  hängt über die sog.  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix linear von den Variationen der Knotenverschiebungen  $\delta \vec{\mathbf{u}}_e$  ab. Aufgrund der Blockstruktur des Knotenverschiebungsvektors (und seiner Variation)  $\vec{\mathbf{u}}_e = [\vec{\mathbf{u}}_1^T, \dots, \vec{\mathbf{u}}_8^T]$  besitzt die sog.  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix ebenfalls Blockstruktur.

$$\delta \vec{\boldsymbol{\epsilon}} = \bar{\mathbf{B}}_{(\vec{\mathbf{u}}_e)} \delta \vec{\mathbf{u}}_e = [\bar{\mathbf{B}}_1, \dots, \bar{\mathbf{B}}_8] \delta \vec{\mathbf{u}}_e \quad \bar{\mathbf{B}}_i \in \mathbb{R}^{6 \times 3} \quad (5.27)$$



Der Austausch des Skalarproduktes der Tensoren  $\boldsymbol{\tau} \circ \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  durch das Skalarprodukt der Vektoren  $\delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  und  $\vec{\boldsymbol{\tau}} := [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}]^T$  (der Vektor  $\vec{\boldsymbol{\tau}}$  enthält die sechs unabhängigen Komponenten des Tensors  $\boldsymbol{\tau}$ ) führt dann direkt zum inneren Element-Kraftvektor  $\vec{\mathbf{f}}_{int}$ .

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi_{int} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} \\
 &= \int_{V_{ref}} (\bar{\mathbf{B}} \delta\vec{\mathbf{u}}_e)^T \vec{\boldsymbol{\tau}} dV_{ref} \\
 &= \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \int_{V_{ref}} \bar{\mathbf{B}}^T \vec{\boldsymbol{\tau}} dV_{ref} \\
 &= \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \vec{\mathbf{f}}_{int}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Die Blockstruktur von  $\bar{\mathbf{B}}$  bedingt, daß  $\vec{\mathbf{f}}_{int}$  ebenfalls eine solche Struktur besitzt.

$$\vec{\mathbf{f}}_{int} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{f}}_{int,1} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{f}}_{int,8} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathbf{f}}_{int,i} := \int_{V_{ref}} \bar{\mathbf{B}}_i^T \vec{\boldsymbol{\tau}} dV_{ref} \quad (i = 1 \dots 8) \tag{5.29}$$

An dieser Stelle ist es wichtig darauf hinzuweisen, daß die  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix nicht wie bei geometrisch linearen Problemen zur Berechnung der Elementverzerrungen verwendet wird. Die hier vorgestellte Methode ist auch keine sog.  $\bar{\mathbf{B}}$ -Methode, die auf einer Ratenformulierung für Spannungen und Deformationen basiert (siehe z.B. *Belytschko, Bindeman* [1993]). Die durch die Diskretisierung von  $\delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  entstandene, auf einer sog. totalen Lagrange Formulierung basierende  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix wird ausschließlich zur Aufstellung des inneren Element-Knotenkraftvektors und der materiellen Steifigkeitsmatrix (siehe Abschnitt 5.4) verwendet.

## 5.4 Die Tangentensteifigkeitsmatrix

In einem impliziten Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen des mechanischen Gleichgewichts, wie dem Newton–Raphson Verfahren, ist es notwendig  $\delta\Pi_{int}$  um die momentane Konfiguration zu linearisieren bzw. das Inkrement  $\Delta(\delta\Pi_{int})$  zu berechnen. Das Inkrement von  $\delta\Pi_{int}$  setzt sich additiv zusammen aus einem Term  $S_{mat}$ , dessen Diskretisierung die sog. materielle Steifigkeitsmatrix ergibt, und einem Term  $S_{geo}$ , der nach der Diskretisierung zur geometrischen Steifigkeit führt.

$$\Delta \int_{V_{ref}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \delta \bar{\mathbf{C}} dV_{ref} = \underbrace{\int_{V_{ref}} \delta \bar{\mathbf{C}} \circ \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2} \right] \Delta \bar{\mathbf{C}} dV_{ref}}_{= S_{mat}} + \underbrace{\int_{V_{ref}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \Delta(\delta \bar{\mathbf{C}}) dV_{ref}}_{= S_{geo}} \quad (5.30)$$

$S_{mat}$  berücksichtigt die Änderung von  $\delta \Pi_{int}$  infolge von Spannungsänderungen  $\Delta \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}_t \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ . Dieses Inkrement von  $\boldsymbol{\tau}$  basiert auf der objektiven Truesdell-Spannungsrate (siehe z.B. *Crisfield* [1997]); der Tensor vierter Stufe  $\mathbf{C}_t$  ist der zugehörige Materialoperator.

$$S_{mat} = \int_{V_{ref}} 2 \bar{\mathbf{F}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \bar{\mathbf{F}} \circ \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2} \right] (2 \bar{\mathbf{F}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \bar{\mathbf{F}}) dV_{ref} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{V_{ref}} \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \circ \bar{\mathbf{F}} \left[ 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2} \right] (\bar{\mathbf{F}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \bar{\mathbf{F}}) \bar{\mathbf{F}}^T dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \circ \mathbf{C}_t \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$S_{mat}$  tritt in ähnlicher Form auch in der konventionellen Verschiebungsmethode auf. Der Unterschied zu dem Ausdruck in der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode liegt ausschließlich in den verschiedenen kinematischen Größen  $\delta \boldsymbol{\epsilon}$  und  $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  bzw.  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$  und  $\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  (vgl. (5.19))

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} := (\text{dev}[\Delta \boldsymbol{\epsilon}] + \frac{\Delta \Theta}{3 \Theta} \mathbf{1}) \quad . \quad (5.33)$$

Der wesentliche Unterschied im Berechnungsaufwand der Steifigkeitsmatrizen zwischen Verschiebungs- und  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode wird durch den geometrischen Steifigkeitsterm  $S_{geo}$  verursacht. Dieser ist auch der Grund dafür, daß es unzulässig ist, die hier untersuchte Methode als  $\bar{\mathbf{B}}$ -Formulierung zu bezeichnen.

Die Berechnung von  $S_{geo}$  erfordert zunächst die Linearisierung der Variation des  $\bar{\mathbf{C}}$ -Operators.

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \bar{\mathbf{C}}) &= \delta \mathbf{C} \frac{2}{3} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \left( \frac{\Delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) + \Delta \mathbf{C} \frac{2}{3} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \left( \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \\ &+ \mathbf{C} \frac{4}{9} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \left( \frac{\Delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) \left( \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \\ &+ \mathbf{C} \frac{2}{3} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \left( \frac{\delta J \Delta J}{J^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta \Theta \delta \Theta}{\Theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{C} \frac{2}{3} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3} \left( \frac{\Delta(\delta\Theta)}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\delta J)}{J} \right) \\
& + \Delta(\delta\mathbf{C}) \frac{2}{3} \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{2/3}
\end{aligned}$$

Der letzte Summand enthält das Inkrement von  $\delta\mathbf{C}$ , das auf folgende Weise dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta\mathbf{C}) &= (\delta\mathbf{F})^T \Delta\mathbf{F} + (\Delta\mathbf{F})^T \delta\mathbf{F} \\
&= \mathbf{F}^T [\nabla^T(\delta\vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta\vec{\mathbf{u}}) + \nabla^T(\Delta\vec{\mathbf{u}}) \nabla(\delta\vec{\mathbf{u}})] \mathbf{F} \quad .
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Nach einer weiteren Umformung

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta\bar{\mathbf{C}}) &= 2\bar{\mathbf{F}}^T \delta\epsilon \bar{\mathbf{F}} \frac{2}{3} \left( \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) + 2\bar{\mathbf{F}}^T \Delta\epsilon \bar{\mathbf{F}} \frac{2}{3} \left( \frac{\delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \\
&+ 2\bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} \frac{2}{9} \left( \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) \left( \frac{\delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \\
&+ 2\bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} \frac{1}{3} \left( \frac{\delta J \Delta J}{J^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Theta \delta\Theta}{\Theta^2} \right) \\
&+ 2\bar{\mathbf{F}}^T \mathbf{1} \bar{\mathbf{F}} \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta(\delta\Theta)}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\delta J)}{J} \right) \\
&+ 2\bar{\mathbf{F}}^T [\nabla^T(\delta\vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta\vec{\mathbf{u}})]_{sym} \bar{\mathbf{F}}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

kann nun das Skalarprodukt im Integranden von  $S_{geo}$  gebildet werden, das unter Berücksichtigung der Definition des symmetrischen Kirchhoffschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  in (5.21) zu folgendem Ausdruck führt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \Delta(\delta\bar{\mathbf{C}}) &= (\boldsymbol{\tau} \circ \delta\epsilon) \frac{2}{3} \left( \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) + (\boldsymbol{\tau} \circ \Delta\epsilon) \frac{2}{3} \left( \frac{\delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \\
&+ (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \frac{2}{9} \left( \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) \left( \frac{\delta\Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) \\
&+ (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \frac{1}{3} \left( \frac{\delta J \Delta J}{J^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta\Theta \delta\Theta}{\Theta^2} \right) \\
&+ (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta(\delta\Theta)}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\delta J)}{J} \right) \\
&+ \boldsymbol{\tau} \circ \nabla^T(\delta\vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta\vec{\mathbf{u}})
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Die Integration des obigen Skalarproduktes liefert dann die gesuchte Größe  $S_{geo}$ .

$$\begin{aligned}
S_{geo} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \boldsymbol{\nabla}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nabla}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_{ref} \\
&+ \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) \left( \frac{\Delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) dV_{ref} \\
&+ \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) \left( \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) dV_{ref} \\
&+ \frac{2}{9} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \left( \frac{\Delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta J}{J} \right) \left( \frac{\delta \Theta}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) dV_{ref} \\
&+ \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \left( \frac{\delta J \Delta J}{J^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta \Theta \delta \Theta}{\Theta^2} \right) dV_{ref} \\
&+ \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \left( \frac{\Delta(\delta \Theta)}{\Theta} \Leftrightarrow \frac{\Delta(\delta J)}{J} \right) dV_{ref}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Zum Vergleich sei an dieser Stelle der der Größe  $S_{geo}$  entsprechende Ausdruck der Verschiebungsformulierung gegenübergestellt, der den mit der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode verbundenen Aufwand bei der Berechnung der Tangentensteifigkeit deutlich macht. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  ist in der Verschiebungsformulierung im Gegensatz zu 5.38 eine Funktion des konventionellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ .

$$\int_{V_{ref}} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \circ \Delta(\delta \mathbf{C}) dV_{ref} = \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{F}) \circ \boldsymbol{\nabla}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nabla}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_{ref} \tag{5.39}$$

Der Vergleich zeigt, daß der erste Summand in (5.38), bis auf die Berechnung der Spannungen, identisch ist mit dem Ausdruck in (5.39). Es ist daher naheliegend, die restlichen Terme in (5.38) in dem Ausdruck  $S_{geo,2}$  zusammenzufassen und als geometrische Extrasteifigkeit zu interpretieren.

$$\begin{aligned}
S_{geo} &= S_{geo,1} + S_{geo,2} \\
S_{geo,1} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{F}}) \circ \boldsymbol{\nabla}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nabla}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_{ref}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

### 5.4.1 Diskretisierung

Nach der Diskretisierung des Verschiebungsfeldes und damit aller anderen kinematischen Größen ergibt sich für  $\Delta(\delta\Pi_{int})$  folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta(\delta\Pi_{int}) &= \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K} \Delta\vec{\mathbf{u}}_e \\ &= \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_{mat} \Delta\vec{\mathbf{u}}_e + \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_{geo,1} \Delta\vec{\mathbf{u}}_e + \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_{geo,2} \Delta\vec{\mathbf{u}}_e\end{aligned}\quad (5.41)$$

Die Größe  $S_{mat}$  berücksichtigt die Änderung von  $\delta\Pi_{int}$  infolge von Spannungsänderungen und führt nach der Diskretisierung des Verschiebungsfeldes und des  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators auf die materielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{mat}$ . Die Größen  $S_{geo,1}$  und  $S_{geo,2}$  werden alleine durch geometrische Nichtlinearitäten wie große Dehnungen bzw. Stauchungen oder große Rotationen verursacht. Diese zwei Steifigkeiten führen nach der Diskretisierung zu den zwei geometrischen Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{geo,1}$  und  $\mathbf{K}_{geo,2}$ .  $S_{geo,2}$  verschwindet genau dann nicht, wenn der gegenüber der Verschiebungsmethode modifizierte Deformationsgradient keine lineare Abbildung in den Verschiebungen ist. Beispiele solcher Deformationstensoren sind die von *Moran et al.* [1990], *de Souza Neto et al.* [1996] und *Nagtegaal et al.* [1974] entwickelten nichtlinearen  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operatoren für schwach kompressible bzw. inkompressible Werkstoffe, bei denen Verschiebungselemente keine befriedigenden Resultate liefern. In impliziten Simulationsverfahren, welche die Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrix erfordern, ist die Berechnung der konsistenten Steifigkeitsmatrix aufgrund der geometrischen Extrasteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,2}$  sehr aufwendig.

Aufgrund der Blockstruktur des Knotenverschiebungsvektors (s.o.) sind die Elementsteifigkeitsmatrix sowie die drei Teilmatrizen  $\mathbf{K}_{mat}$ ,  $\mathbf{K}_{geo,1}$  und  $\mathbf{K}_{geo,2}$  symmetrische Blockmatrizen, die aus jeweils 64 Matrizen der Dimension  $3 \times 3$  aufgebaut sind:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{18} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{28} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{18}^T & \mathbf{K}_{28}^T & \cdots & \mathbf{K}_{88} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ij} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (5.42)$$

Die Diskretisierung von  $S_{mat}$  führt zur sog. materiellen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{mat}$ :

$$\begin{aligned}S_{mat} &= \int_{V_{ref}} \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \circ \mathbf{C}_t \Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} (\bar{\mathbf{B}} \delta\vec{\mathbf{u}}_e)^T \mathbf{C}_t (\bar{\mathbf{B}} \Delta\vec{\mathbf{u}}_e) dV_{ref} \\ &= \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_{mat} \Delta\vec{\mathbf{u}}_e\end{aligned}\quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^8 [\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i] \mathbf{K}_{ij}^{mat} \begin{bmatrix} \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta w_j \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{ij}^{mat} &= \int_{V_{ref}} \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{C}_t \bar{\mathbf{B}}_j dV_{ref} \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß  $\mathbf{C}_t$  in der diskretisierten Form von  $S_{mat}$  statt eines Werkstoffensors vierter Stufe eine symmetrische  $6 \times 6$  Matrix ist!

Die Komponenten des Verschiebungsgradienten bzgl. der Momentankonfiguration  $\nabla \vec{\mathbf{u}}$  werden in einem Vektor  $\vec{\mathbf{g}}$  angeordnet. Dieser hängt über die Matrix  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{9 \times 24}$  vom Vektor der Knotenverschiebungen  $\vec{\mathbf{u}}_e$  ab.

$$\vec{\mathbf{g}} = \mathbf{G} \vec{\mathbf{u}}_e = \sum_{i=1}^8 \mathbf{G}_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \vec{\nabla} N^i & \vec{\mathbf{0}} & \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{0}} & \vec{\nabla} N^i & \vec{\mathbf{0}} \\ \vec{\mathbf{0}} & \vec{\mathbf{0}} & \vec{\nabla} N^i \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_i \in \mathbb{R}^{9 \times 3} \quad (5.46)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,1}$  entsteht durch die Diskretisierung von  $S_{geo,1}$  mittels Gleichung (5.45).

$$\begin{aligned}
S_{geo,1} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \nabla^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_{ref} \quad (5.47) \\
&= \int_{V_{ref}} (\mathbf{G} \delta \vec{\mathbf{u}}_e)^T \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\tau} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{\tau}]} (\mathbf{G} \Delta \vec{\mathbf{u}}_e) dV_{ref} \\
&= \delta \vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_{geo,1} \Delta \vec{\mathbf{u}}_e \\
&= \sum_{i,j=1}^8 [\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i] \mathbf{K}_{geo,1}^{ij} \begin{bmatrix} \Delta u_j \\ \Delta v_j \\ \Delta w_j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{geo,1}^{ij} = \int_{V_{ref}} \mathbf{G}_i^T [\boldsymbol{\tau}] \mathbf{G}_j dV_{ref} \quad [\boldsymbol{\tau}] \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \quad (5.48)$$

Die genaue Betrachtung der Blockmatrizen, aus denen die Matrix  $\mathbf{K}_{geo,1}$  aufgebaut ist, zeigt, daß diese proportional zur  $3 \times 3$  Einheitsmatrix sind. Diese sehr einfache Struktur bewirkt eine hohe Effizienz bei der Berechnung von  $\mathbf{K}_{geo,1}$ .

$$\mathbf{K}_{geo,1}^{ij} = \begin{bmatrix} geo & 0 & 0 \\ 0 & geo & 0 \\ 0 & 0 & geo \end{bmatrix} = geo \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$geo = \int_{V_{ref}} (\vec{\nabla} N^i)^T \boldsymbol{\tau} \vec{\nabla} N^j dV_{ref} \quad (5.50)$$

Leider geht dieser Vorteil der konventionellen Verschiebungsformulierung, in der  $\mathbf{K}_{geo,1}$  die gesamte geometrische Steifigkeitsmatrix darstellt, in der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung aufgrund der vollbesetzten geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,2}$  verloren.

## 5.5 $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung nach Moran

*Moran et al.* [1990] schlugen eine  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode vor, in der die Dilatation  $\Theta$  gleich der am Elementmittelpunkt ausgewerteten Determinante  $J$  des Deformationstensors  $\mathbf{F}$  ist.

$$\boxed{\Theta_{moran} = J_c} \quad (5.51)$$

Der Index  $c$  an einer Größe bedeutet hier und den nachfolgenden Abschnitten den Wert der entsprechenden Größe am Elementmittelpunkt.

Diese Wahl von  $\Theta$  sichert zwar die Unterdrückung der volumetrischen Versteifung, verhindert aber die Erfüllung des Patch-Tests für beliebige Referenzgeometrien des 8-Knoten Elementes. Für volumetrisch und isochor entkoppelte Materialgesetze, die in den Anwendungen eine große Bedeutung haben, reduziert sich die Moransche  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode auf die weithin bekannte Selektiv Reduzierte Integration.

### 5.5.1 Patch-Test

Der Beweis dafür, daß die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode nach *Moran et al.* nur bedingt konvergent ist, ist schnell erbracht. Es muß lediglich geprüft werden unter welchen Bedingungen das Konvergenzkriterium (5.10) erfüllt wird. Voraussetzung für die Auswertung von (5.10) ist die Homogenität des Deformationsfeldes  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c$ . Damit ergibt sich für die Variationen  $\delta\Theta$  und  $\delta J$ :

$$\begin{aligned} \delta\Theta &= J_c \mathbf{1} \circ \delta\epsilon_c \\ \delta J &= J_c \mathbf{1} \circ (\delta\epsilon_c + \delta\epsilon_{nc}) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Das Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in (5.10) ergibt dann Gleichung (5.53).

$$\begin{aligned} \int_{V_{ref}} \left( \frac{\delta \Theta}{J_c} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J_c} \right) dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \epsilon) dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c \Leftrightarrow \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon_{nc} dV_{ref} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Die Bedingung (5.10) ist daher äquivalent mit der Forderung:

$$\int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon_{nc} dV_{ref} = 0 \quad . \quad (5.54)$$

(5.10) oder (5.53) ist genau dann erfüllt, wenn das Integral über die Spur des nichtkonstanten Tensors  $\delta \epsilon_{nc}$  verschwindet. Das ist aber nur für den Spezialfall eines Parallelepipeds als Ausgangsgeometrie des Elementes gewährleistet. D.h. die Formulierung nach Moran et al. erfüllt den „Patch-Test“ nur für derartige Elemente.

### 5.5.2 Kraftvektor und Steifigkeitsmatrix

Die Aufstellung des inneren Elementkraftvektors und der materiellen Tangentensteifigkeitsmatrix setzt die Kenntnis des Operators

$$\begin{aligned} \delta \bar{\epsilon} &= \text{dev}[\delta \epsilon] + \frac{\delta \Theta}{3 \Theta} \mathbf{1} \\ &= \text{dev}[\delta \epsilon] + \frac{1}{3} (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c) \\ &= \delta \epsilon + \frac{1}{3} (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \epsilon) \end{aligned} \quad (5.55)$$

und seiner Diskretisierung, der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix voraus ( $\delta \bar{\epsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta \vec{\mathbf{u}}_e$ ).

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} N_x^i & 0 & 0 \\ 0 & N_y^i & 0 \\ 0 & 0 & N_z^i \\ N_y^i & N_x^i & 0 \\ N_z^i & 0 & N_x^i \\ 0 & N_z^i & N_y^i \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} N_{x,c}^i \Leftrightarrow N_x^i & N_{y,c}^i \Leftrightarrow N_y^i & N_{z,c}^i \Leftrightarrow N_z^i \\ N_{x,c}^i \Leftrightarrow N_x^i & N_{y,c}^i \Leftrightarrow N_y^i & N_{z,c}^i \Leftrightarrow N_z^i \\ N_{x,c}^i \Leftrightarrow N_x^i & N_{y,c}^i \Leftrightarrow N_y^i & N_{z,c}^i \Leftrightarrow N_z^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$



Damit kann dann die Variation der inneren potentiellen Energie und aus dieser der innere Elementkraftvektor berechnet werden.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{int}^{Moran} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} dV_{ref} + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Durch die Nichtlinearität des  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators verursacht, setzt sich die Elementsteifigkeitsmatrix nicht nur aus der materiellen  $\mathbf{K}_{mat}$  – allerdings mit der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix statt mit der konventionellen  $\mathbf{B}$ -Matrix berechnet – und der gewöhnlichen geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,1}$  zusammen, sondern enthält auch die sog. Extrasteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,2}$ . Deshalb müssen erst die folgenden beiden Ausdrücke berechnet werden,

$$\Delta \boldsymbol{\Theta} = J_c (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c) \quad (5.58)$$

$$\Delta(\delta \boldsymbol{\Theta}) = J_c (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c) (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}_c) \Leftrightarrow J_c \mathbf{1} \circ \nabla_c(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})$$

um dann den Extraterm  $S_{geo,2}$  von  $\Delta(\delta \Pi_{int})$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} S_{geo,2}^{Moran} &= \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\ &+ \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\ &+ \frac{2}{9} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\ &+ \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) [\mathbf{1} \circ \nabla(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta \vec{\mathbf{u}}) \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \nabla_c(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})] dV_{ref} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Die Diskretisierung der einzelnen Summanden von  $S_{geo,2}^{Moran}$  führt dann zu den Termen, aus denen sich die gesuchte Extrasteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,2}$  der Formulierung von *Moran et al.* [1990] zusammensetzt.

$$\mathbf{K}_{geo,2}^{ij} = \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} [\mathbf{B}_i \vec{\boldsymbol{\tau}}] \otimes [\vec{\nabla}_c N^j \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^j] dV_{ref} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} \left[ \vec{\nabla}_c N^i \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^i \right] \otimes [\mathbf{B}_j \vec{\tau}] dV_{ref} \\
& + \frac{2}{9} \int_{V_{ref}} (\tau \circ \mathbf{1}) \left[ \vec{\nabla}_c N^i \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^i \right] \otimes \left[ \vec{\nabla}_c N^j \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^j \right] dV_{ref} \\
& + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\tau \circ \mathbf{1}) \mathbf{N}_d^{ij} dV_{ref}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_d^{ij} := \begin{bmatrix} N_x^j N_x^i \Leftrightarrow N_{x,c}^j N_{x,c}^i & N_x^j N_y^i \Leftrightarrow N_{x,c}^j N_{y,c}^i & N_x^j N_z^i \Leftrightarrow N_{x,c}^j N_{z,c}^i \\ N_y^j N_x^i \Leftrightarrow N_{y,c}^j N_{x,c}^i & N_y^j N_y^i \Leftrightarrow N_{y,c}^j N_{y,c}^i & N_y^j N_z^i \Leftrightarrow N_{y,c}^j N_{z,c}^i \\ N_z^j N_x^i \Leftrightarrow N_{z,c}^j N_{x,c}^i & N_z^j N_y^i \Leftrightarrow N_{z,c}^j N_{y,c}^i & N_z^j N_z^i \Leftrightarrow N_{z,c}^j N_{z,c}^i \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

## 5.6 $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung nach Nagtegaal

Nagtegaal et al. [1974] benutzten zur Konstruktion eines  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators nicht die Determinante des  $\mathbf{F}$ -Tensors am Elementmittelpunkt, sondern es wird eine über das Elementvolumen gemittelte Dilation definiert und mit dieser der Operator  $\bar{\mathbf{F}}$  berechnet. Die Dilatation  $\Theta_{nagt}$  ist in der Berechnung aufwendiger als  $\Theta_{Moran}$ . Die Nagtegaalsche Methode besitzt aber bzgl. der Eindeutigkeit des Elementvolumens und der Erfüllung des Patch-Tests Vorteile gegenüber der Methode von Moran. Die Nagtegaalsche Formulierung hat außerdem den Vorteil eine variationelle Basis zu besitzen. Das 3-Feld Funktional der sog. Hybrid-Methode (siehe Simo, Taylor [1991]) enthält unabhängige Verschiebungs-, Druck- und Dilatationsfelder. Für den Spezialfall, daß Dilatation und Druck im Element konstant gewählt werden, ergibt sich aus den Variationsgleichungen für die homogene Dilatation gerade die gemittelte oder „mean dilatation“  $\Theta_{nagt}$ .

$$\boxed{\Theta_{nagt} = \frac{V_t}{V_{ref}} = \frac{1}{V_{ref}} \int_{V_{ref}} J dV_{ref}} \quad (5.62)$$

$$\Rightarrow \delta \Theta_{nagt} = \frac{1}{V_{ref}} \int_{V_{ref}} J (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon) dV_{ref} = \frac{1}{V_{ref}} \int_{V_t} (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon) dV_t \quad (5.63)$$

In den folgenden Ausführungen wird eine abkürzende Schreibweise

$$\langle (\bullet) \rangle := \frac{1}{V_t} \int_{V_t} (\bullet) dV_t \quad (5.64)$$

für die häufig vorkommenden Mittelwerte benutzt.

### 5.6.1 Patch-Test

Im Gegensatz zur Formulierung von *Moran et al.* befriedigt ein 8-Knoten Element nach der Methode von *Nagtegaal et al.* den Patch-Test für beliebige Referenzgeometrien. Der Beweis dieser Behauptung erfolgt wieder mit Hilfe des Konvergenzkriteriums (5.10). An dieser Stelle sei daran erinnert, daß der Patch-Test ein homogenes Deformationsfeld voraussetzt. Daher ist das aktuelle Elementvolumen gleich dem Produkt aus (konstanter) Dilatation  $J_c$  und Referenzvolumen  $V_{ref}$ .

$$V_t = \int_{V_{ref}} J dV_{ref} = J_c V_{ref}$$

Die Bedingung (5.10) lautet für die Nagtegaal'sche  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung:

$$\begin{aligned} \int_{V_{ref}} \left( \frac{\delta V_t}{V_t} \Leftrightarrow \frac{\delta J}{J} \right) dV_{ref} &= \frac{V_{ref}}{V_t} \int_{V_{ref}} J_c \mathbf{1} \circ \delta \epsilon dV_t \Leftrightarrow \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon dV_{ref} \\ &= \frac{V_{ref} J_c}{J_c V_{ref}} \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon dV_{ref} \Leftrightarrow \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon dV_{ref} \Leftrightarrow \int_{V_{ref}} \mathbf{1} \circ \delta \epsilon dV_{ref} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

Bei dem obigen Beweis wurden keine Anforderungen an die Geometrie der Ausgangskonfiguration des Elementes gestellt. Der Patch-Test wird deshalb nicht nur für Quader oder Parallelepipede, sondern für beliebige Elementgeometrien erfüllt.

### 5.6.2 Kraftvektor und Steifigkeitsmatrix

Die Aufstellung des inneren Elementkraftvektors und der materiellen Tangentensteifigkeitsmatrix setzt die Kenntnis des Operators

$$\begin{aligned} \delta \bar{\epsilon} &= \text{dev}[\delta \epsilon] + \frac{\delta \Theta}{3 \Theta} \mathbf{1} \\ &= \text{dev}[\delta \epsilon] + \frac{1}{3 V_t} \int_{V_t} (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon) dV_t \mathbf{1} \\ &= \text{dev}[\delta \epsilon] + \frac{1}{3} \langle \mathbf{1} \circ \delta \epsilon \rangle \mathbf{1} \\ &= \delta \epsilon + \frac{1}{3} (\langle \mathbf{1} \circ \delta \epsilon \rangle \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \epsilon) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.66)$$

und seiner Diskretisierung, der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix voraus ( $\delta\bar{\epsilon} = \bar{\mathbf{B}} \delta\bar{\mathbf{u}}_e$ ).

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} N_x^i & 0 & 0 \\ 0 & N_y^i & 0 \\ 0 & 0 & N_z^i \\ N_y^i & N_x^i & 0 \\ N_z^i & 0 & N_x^i \\ 0 & N_z^i & N_y^i \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \langle N_x^i \rangle \Leftrightarrow N_x^i & \langle N_y^i \rangle \Leftrightarrow N_y^i & \langle N_z^i \rangle \Leftrightarrow N_z^i \\ \langle N_x^i \rangle \Leftrightarrow N_x^i & \langle N_y^i \rangle \Leftrightarrow N_y^i & \langle N_z^i \rangle \Leftrightarrow N_z^i \\ \langle N_x^i \rangle \Leftrightarrow N_x^i & \langle N_y^i \rangle \Leftrightarrow N_y^i & \langle N_z^i \rangle \Leftrightarrow N_z^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Damit kann dann die Variation der inneren potentiellen Energie und aus dieser der innere Elementkraftvektor berechnet werden.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{int}^{Nagt} &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta\bar{\epsilon} dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} \circ \delta\epsilon dV_{ref} + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} \boldsymbol{\tau} (\langle \mathbf{1} \circ \delta\epsilon \rangle \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta\epsilon) dV_{ref} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Durch die Nichtlinearität des  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operators verursacht, setzt sich die Elementsteifigkeitsmatrix nicht nur aus der materiellen  $\mathbf{K}_{mat}$  – allerdings mit der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix statt mit der konventionellen  $\mathbf{B}$ -Matrix berechnet – und der gewöhnlichen geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,1}$  zusammen, sondern enthält auch die sog. Extrasteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,2}$ . Deshalb müssen erst die beiden folgenden Ausdrücke (5.69) und (5.70) berechnet werden.

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta} = \frac{1}{V_t} \int_{V_t} (\mathbf{1} \circ \Delta\epsilon) dV_t \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\delta\Theta)}{\Theta} &= \frac{1}{V_t} \int_{V_t} (\mathbf{1} \circ \Delta\epsilon) (\mathbf{1} \circ \delta\epsilon) dV_t \Leftrightarrow \frac{1}{V_t} \int_{V_t} \mathbf{1} \circ \nabla(\delta\bar{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta\bar{\mathbf{u}}) dV_t \\ &= \langle (\mathbf{1} \circ \Delta\epsilon) (\mathbf{1} \circ \delta\epsilon) \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{1} \circ \nabla(\delta\bar{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta\bar{\mathbf{u}}) \rangle \end{aligned} \quad (5.70)$$

Dann kann der Extraterm  $S_{geo,2}$  von  $\Delta(\delta\Pi_{int})$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
S_{geo,2}^{Nagt} = & \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) (< \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon} > \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\
& + \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) (< \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} > \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\
& + \frac{2}{9} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) (< \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon} > \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) (< \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} > \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\
& + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) [\mathbf{1} \circ \nabla(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta \vec{\mathbf{u}}) \Leftrightarrow < \mathbf{1} \circ \nabla(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta \vec{\mathbf{u}}) >] dV_{ref} \\
& + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) [< (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) > \Leftrightarrow < \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon} > < \mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} >] dV_{ref}
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Die Diskretisierung von  $S_{geo,2}^{nagt}$  ergibt dann die gesuchte geometrische Extrasteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{geo,2}$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{geo,2}^{ij} + & \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} [\mathbf{B}_i \vec{\boldsymbol{\tau}}] \otimes [< \vec{\nabla} N^j > \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^j] dV_{ref} \\
& + \frac{2}{3} \int_{V_{ref}} [< \vec{\nabla} N^i > \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^i] \otimes [\mathbf{B}_j \vec{\boldsymbol{\tau}}] dV_{ref} \\
& + \frac{2}{9} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) [< \vec{\nabla} N^i > \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^i] \otimes [< \vec{\nabla} N^j > \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^j] dV_{ref} \\
& + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \mathbf{N}_d^{ij} dV_{ref} \\
& + \frac{1}{3} \int_{V_{ref}} (\boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1}) \mathbf{N}_{int}^{ij} dV_{ref}
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Die in  $\mathbf{K}_{geo,2}^{ij}$  auftretenden Matrizen  $\mathbf{N}_d^{ij}$  und  $\mathbf{N}_{int}^{ij}$  sind durch die folgenden beiden Ausdrücke (5.73) und (5.74) gegeben:

$$\mathbf{N}_d^{ij} := \begin{bmatrix} N_x^j N_x^i \Leftrightarrow < N_x^j N_x^i > & N_x^j N_y^i \Leftrightarrow < N_x^j N_y^i > & N_x^j N_z^i \Leftrightarrow < N_x^j N_z^i > \\ N_y^j N_x^i \Leftrightarrow < N_y^j N_x^i > & N_y^j N_y^i \Leftrightarrow < N_y^j N_y^i > & N_y^j N_z^i \Leftrightarrow < N_y^j N_z^i > \\ N_z^j N_x^i \Leftrightarrow < N_z^j N_x^i > & N_z^j N_y^i \Leftrightarrow < N_z^j N_y^i > & N_z^j N_z^i \Leftrightarrow < N_z^j N_z^i > \end{bmatrix} \tag{5.73}$$

$$\mathbf{N}_{int}^{ij} := \begin{bmatrix} geo_x & 0 & 0 \\ 0 & geo_y & 0 \\ 0 & 0 & geo_z \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} geo_x &:= \langle N_x^i N_x^j \rangle \Leftrightarrow \langle N_x^i \rangle \langle N_x^j \rangle \\ geo_y &:= \langle N_y^i N_y^j \rangle \Leftrightarrow \langle N_y^i \rangle \langle N_y^j \rangle \\ geo_z &:= \langle N_z^i N_z^j \rangle \Leftrightarrow \langle N_z^i \rangle \langle N_z^j \rangle \end{aligned} \quad (5.74)$$

## 5.7 Eine Bemerkung zum Elementvolumen

Bei inhomogenen Deformationen eines  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elementes ist das aktuelle Elementvolumen nicht mehr eindeutig definiert. Diese Mehrdeutigkeit wird durch die Modifikation der Determinante des  $\mathbf{F}$ -Tensors der Verschiebungsmethode verursacht. Das daraus resultierende fiktive Elementvolumen, das sich i.a. bei der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode nicht vermeiden läßt, sollte jedoch so gering wie möglich sein (siehe *Nagtegaal, Fox* [1996]). Ein Grund, dieses fiktive Elementvolumen unter Kontrolle zu halten, ist, daß eine zu große Differenz zwischen dem aktuellen Elementvolumen  $V_t$ , das alleine durch das Verschiebungsfeld bestimmt ist, und dem „ $\bar{\mathbf{F}}$ -Volumen“  $\bar{V}_t$  die sog. „hourglass“-Moden aktivieren kann (siehe hierzu *Bischoff et al.* [1998]).

Die Differenz zwischen  $V_t$  und  $\bar{V}_t$  beträgt:

$$\begin{aligned} V_t \Leftrightarrow \bar{V}_t &= \int_{V_{ref}} \det(\mathbf{F}) dV_{ref} \Leftrightarrow \int_{V_{ref}} \Theta dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \det(\mathbf{F}) dV_{ref} \Leftrightarrow \Theta V_{ref}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Aus der Gleichung (5.75) kann man erkennen, daß die Differenz für den Spezialfall homogener Deformationen, die durch  $\Theta = \det(\mathbf{F}_c)$  charakterisiert sind, verschwindet. Für inhomogene Deformationen, die i.a. in einer numerischen Simulation auftreten, unterscheiden sich die beiden Volumina  $V_t$  und  $\bar{V}_t$ .

Der Nagtegaalsche Ansatz bildet jedoch unter den  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methoden eine Ausnahme, da bei dieser Modifikation der Verschiebungsformulierung die Eindeutigkeit des Elementvolumens erhalten bleibt.

$$\begin{aligned} V_t \Leftrightarrow \bar{V}_t &= \int_{V_{ref}} [\det(\mathbf{F}) \Leftrightarrow \Theta_{nagt}] dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \left[ \det(\mathbf{F}) \Leftrightarrow \frac{V_t}{V_{ref}} \right] dV_{ref} \\ &= V_t \Leftrightarrow \frac{V_t}{V_{ref}} \int_{V_{ref}} dV_{ref} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

## 5.8 Inkonsistente Methode nach de Souza Neto [1996]

De Souza Neto *et al.* [1996] veröffentlichten ein *ad hoc* Verfahren zur Unterdrückung des „incompressibility–locking“. Diese Formulierung kann nicht direkt als  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode bezeichnet werden, jedenfalls nicht im Sinne der in den vorigen Abschnitten vorgestellten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode. Sie wird daher als inkonsistente  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode bezeichnet.

Es wird ein  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator definiert, der mit dem Operator von Moran *et al.* [1990] identisch ist, und damit der Cauchy–Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  berechnet.

$$\bar{\mathbf{F}} = \left( \frac{J}{J_c} \right)^{1/3} \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{F}}) = \frac{2}{J_c} \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T = \frac{2}{J_c} \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{F}}) \quad (5.77)$$

Der Ausgangspunkt für die Aufstellung des inneren Element–Kraftvektors und der Tangentensteifigkeitsmatrix in der inkonsistenten Methode ist nicht  $\Pi_{int}$  sondern die Variation  $\delta\Pi_{int}$ .

$$\boxed{\delta\Pi_{int} = \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{F}}) \circ \delta\boldsymbol{\epsilon} dV_t} \quad (5.78)$$

Das Integral in (5.78) ist mit der Variation der inneren potentiellen Energie in der konventionellen Verschiebungsmethode, sieht man vom Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ab, identisch. Dies bedeutet, daß die Kinematik des Elementes nicht verändert wird. Gerade hierin liegt die Inkonsistenz der Methode, die eine **unsymmetrische** Steifigkeitsmatrix zur Folge hat.

Das Inkrement von (5.78) kann als Summe von drei Termen dargestellt werden, von denen der letzte mit dem geometrischen Steifigkeitsterm der Verschiebungsformulierung identisch ist.

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\Pi_{int}) &= \frac{1}{3} \int_{V_t} (\boldsymbol{\sigma} \circ \delta\boldsymbol{\epsilon}) [\mathbf{1} \circ \Delta\boldsymbol{\epsilon} \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta\boldsymbol{\epsilon}_c] dV_t \\ &+ \int_{V_t} \Delta\boldsymbol{\sigma} \circ \delta\boldsymbol{\epsilon} dV_t \\ &+ \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\nabla}^T(\delta\bar{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nabla}(\Delta\bar{\mathbf{u}}) dV_t \end{aligned} \quad (5.79)$$

Das objektive Spannungsinkrement  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  im zweiten Summanden von (5.79) wird wie üblich mit Hilfe des Werkstoffensors vierter Stufe  $\mathcal{C}_t$  ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{J_c} \bar{\mathbf{F}}^T \left[ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2} \Delta \bar{\mathbf{C}} \right] \bar{\mathbf{F}} \\
&= \frac{1}{J_c} \bar{\mathbf{F}}^T \left[ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{C}}^2} \right] (2 \bar{\mathbf{F}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \bar{\mathbf{F}}) \bar{\mathbf{F}} \\
&= \mathcal{C}_t \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Die spezielle Struktur von  $\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \Delta \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{3} \mathbf{1} [\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}] dV_t \tag{5.81}$$

bedingt, daß der zweite Summand in (5.79) einen Term enthält, dessen Diskretisierung die materielle Steifigkeitsmatrix der konventionellen Verschiebungsformulierung ergibt, sowie einen Extrasteifigkeitsterm.

$$\begin{aligned}
\int_{V_t} \Delta \boldsymbol{\sigma} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t &= \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ \mathcal{C}_t \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} dV_t \\
&= \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ \mathcal{C}_t \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t + \frac{1}{3} \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ [\mathcal{C}_t \mathbf{1}] [\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}]
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Der endgültige Ausdruck für  $\Delta(\delta \Pi_{int})$  ergibt sich durch Einsetzen von (5.82) in (5.79) und anschließender Zusammenfassung gleichartiger Terme:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta \Pi_{int}) &= \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ \mathcal{C}_t \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t \\
&+ \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma} \circ \nabla^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \nabla(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_t \\
&+ \frac{1}{3} \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ [\mathcal{C}_t \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}_c \Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}] dV_t
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Bei einem oberflächlichen Vergleich von (5.83) mit dem entsprechenden Ausdruck für  $\Delta(\delta \Pi_{int})$  in der konsistenten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode könnte man zu der Schlußfolgerung gelangen, daß die inkonsistente Methode von *de Souza Neto et al.* [1996] für praktische Anwendungen geeigneter sei als die konsistente  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode. Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix erfordert tatsächlich weniger Aufwand als bei der FE-Formulierung nach *Moran et al.* [1990] und *Nagtegaal et al.* [1974]. Die Extrasteifigkeitsmatrix, die durch die Diskretisierung des dritten Summanden in (5.83) entsteht, ist aber nicht symmetrisch. Die Unsymmetrie der Elementsteifigkeitsmatrix und deshalb auch der Gesamtsteifigkeitsmatrix der Struktur ist



unabhängig von einem speziellen Werkstoffmodell. Für die in dieser Dissertation betrachteten hyperelastischen Materialien ist die Folge der Unsymmetrie, daß der Aufwand zur Lösung des nichtlinearen FE-Gleichungssystems erheblich größer ist als in der konsistenten Methode.

Die Elementsteifigkeitsmatrix setzt sich aus der Steifigkeitsmatrix der Verschiebungsformulierung  $\mathbf{K}_{disp}$  und der Extrasteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{extra}$  zusammen:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{disp} + \mathbf{K}_{extra}$$

Die Matrix  $\mathbf{K}_{extra}$  ist aus  $3 \times 3$  Blockmatrizen

$$\mathbf{K}_{ij}^{extra} = \int_{V_t} \mathbf{B}_i^T \vec{\mathbf{q}} \otimes \frac{1}{3} (\vec{\nabla}_c N^j \Leftrightarrow \vec{\nabla} N^j) dV_t \quad (5.84)$$

aufgebaut, wobei der Vektor  $\vec{\mathbf{q}}$  wie folgt definiert ist:

$$\vec{\mathbf{q}} := \begin{bmatrix} C_{t,11} + C_{t,12} + C_{t,13} \Leftrightarrow \sigma_{11} \\ C_{t,21} + C_{t,22} + C_{t,23} \Leftrightarrow \sigma_{22} \\ C_{t,31} + C_{t,32} + C_{t,33} \Leftrightarrow \sigma_{33} \\ C_{t,41} + C_{t,42} + C_{t,43} \Leftrightarrow \sigma_{12} \\ C_{t,51} + C_{t,52} + C_{t,53} \Leftrightarrow \sigma_{13} \\ C_{t,61} + C_{t,62} + C_{t,63} \Leftrightarrow \sigma_{23} \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

$\mathbf{K}_{extra}$  ist aufgrund der Eigenschaft der Blockmatrizen:

$$(\mathbf{K}_{ij}^{extra})^T \neq \mathbf{K}_{ji}^{extra}$$

nicht symmetrisch!

## 5.9 Vergleich zweier $\bar{\mathbf{F}}$ -Strategien

Der direkte Vergleich der konsistenten  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode und der inkonsistenten Methode soll den wesentlichen Unterschied in den beiden Verfahren deutlich machen. In beiden Verfahren wird ein  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator zur Unterdrückung oder zumindest Abschwächung der volumetrischen Versteifung des 8-Knoten Elementes eingesetzt.

Bei der inkonsistenten Methode, wie sie von *de Souza Neto et al.* [1996] beschrieben wurde, wird der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator aber nur für die Berechnung der Cauchy-Spannungen verwendet. Der so definierte Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{1}{\Theta} \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T, \quad \Theta = \det(\bar{\mathbf{F}}) \quad (5.86)$$

wird dann in  $\delta\Pi_{int}$  bzw.  $\vec{\mathbf{f}}_{int}$  der konventionellen Verschiebungsformulierung eingesetzt. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht darin, daß die kinematischen Größen  $\delta\epsilon$  bzw.  $\mathbf{B}$  des 8-Knoten Verschiebungselementes nicht verändert werden. Die Effizienz bei der Berechnung des inneren Knotenkraftvektors bleibt aufgrund der schwachen Besetzungsstruktur der  $\mathbf{B}$ -Matrix erhalten.

In impliziten Verfahren wie etwa Newton-Raphson muß die Tangentensteifigkeitsmatrix aufgestellt werden. Hier zeigt sich dann der gravierende Nachteil dieser Strategie: die konsistente Linearisierung des inneren Kraftvektors führt zu einer **unsymmetrischen** Steifigkeitsmatrix. Diese Unsymmetrie ist unabhängig von einem speziellen Materialgesetz.

Bei der konsistenten Methode, wie sie in der vorliegenden Arbeit in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben wurde, wird ebenfalls der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator für die Berechnung von Cauchy-Spannungen verwendet.  $\delta\Pi_{int}$  bzw.  $\vec{\mathbf{f}}_{int}$  werden aber mit dem Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} := \frac{1}{J} \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T, \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad (5.87)$$

und dem von  $\bar{\mathbf{F}}$  abhängigen Operator  $\delta\bar{\epsilon}$  bzw. der Matrix  $\bar{\mathbf{B}}$  berechnet. Der Nachteil dieses Vorgehens besteht offensichtlich darin, daß die kinematische Größe  $\bar{\mathbf{B}}$  die Effizienz bei der Berechnung des inneren Knotenkraftvektors gegenüber Verschiebungs- und inkonsistenter  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung herabsetzt. Der Grund hierfür ist die andere Besetzungsstruktur der  $\bar{\mathbf{B}}$ -Matrix. In impliziten Verfahren besitzt die konsistente Methode einen Vorteil: die konsistente Linearisierung des inneren Kraftvektors führt bei Hyperelastizität und assoziativer Plastizität zu einer **symmetrischen** Tangentensteifigkeitsmatrix. Es darf an dieser Stelle aber nicht verschwiegen werden, daß bei anderen nichttrivialen Simulationen die Möglichkeit besteht, diesen Vorteil einer symmetrischen Matrix gegenüber der inkonsistenten Methode zu verlieren. Werkstoffmodelle wie nicht-assoziative Plastizität und bestimmte Kontaktmodellierungen haben auch in der konsistenten Methode unsymmetrische Steifigkeitsmatrizen zur Folge. Dann wirkt sich der Nachteil der Methode von *de Souza Neto et al.* [1996] natürlich nicht negativ aus.

### Unterschiede zwischen konsistenter und inkonsistenter Methode

konsistente $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode	inkonsistente $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode
↓	↓
<p style="text-align: center;">Berechnung der Cauchy-Spannungen:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{F}})$ <p style="text-align: center;">Benutzung der Variation des <math>\bar{\mathbf{F}}</math>-Operators für virtuelle innere Arbeit:</p> $\delta \Pi_{int} = \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{F}}, J) \circ \delta \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{F}}^{-1} dV_t$	<p style="text-align: center;">Berechnung der Cauchy-Spannungen:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \bar{\mathbf{F}}} \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{F}})$ <p style="text-align: center;">Berechnung der virtuellen inneren Arbeit mit <b>unmodifiziertem</b> <b><math>\mathbf{F}</math></b>-Tensor:</p> $\delta \Pi_{int} = \int_{V_t} \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{F}}) \circ \delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} dV_t$
↓	↓
konsistente Linearisierung: <b>symmetrische</b> Steifigkeits-Matrix	konsistente Linearisierung: <b>unsymmetrische</b> Steifigkeits-Matrix

Tabelle 5.1: Vergleich zweier  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elementformulierungen

# Kapitel 6

## Hybrid-Formulierung

Eine scheinbare Alternative zu den  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elementen ist das auf der sog. Hybridformulierung basierende Q1P0-Element mit konstantem Elementdruck und konstanter Elementdilatation. Die Hybridformulierung wurde von *Simo, Taylor* [1991] ausführlich dargestellt und untersucht. Charakteristisch für diese Methode ist, daß alleine das Verschiebungsfeld im gesamten Diskretisierungsgebiet stetig ist. Druck- und Dilatationsfeld sind dagegen nur im Element stetig. Die Freiwerte von Dilatation  $\Theta$  und Druck  $P$  können daher auf Elementebene eliminiert werden.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf einen für die praktische Anwendung sehr wichtigen Spezialfall der Hybridmethode: Druck  $P$  und Dilatation  $\Theta$  werden im Element als konstant angenommen. Es wird sich in der folgenden Untersuchung herausstellen, daß dieses spezielle 8-Knoten Hybrid-Element, das sog. Q1P0-Element, und das  $\bar{\mathbf{F}}$ -Element nach Nagtegaal identisch sind. Wie in Abschnitt 6.2 gezeigt wird, zeichnet sich die Nagtegaalsche Methode gegenüber anderen  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methoden dadurch aus, daß für sie ein Hu-Washizu Funktional existiert, dessen Variation den in Abschnitt 5.6 ad hoc eingeführten Operator  $\bar{\mathbf{F}}_{nagt}$  festlegt.

### 6.1 Beschreibung der Methode

Eine geeignete Methode zur Unterdrückung der volumetrischen Versteifung ist die Modifikation des Deformationstensors  $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \text{GRAD } \vec{\mathbf{u}}$  der konventionellen Verschiebungsmethode.  $\mathbf{F}$  wird durch den in (6.1) definierten  $\bar{\mathbf{F}}$  Operator ersetzt (s. hierzu (5.2)).

$$\bar{\mathbf{F}} = \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{1/3} \mathbf{F}, \quad \text{Det}[\bar{\mathbf{F}}] = \Theta \quad (6.1)$$

Die Determinante von  $\bar{\mathbf{F}}$  ist nicht mehr die ortsabhängige Dilatation  $J = \text{Det}[\mathbf{F}]$ , die für die Elementversteifung verantwortlich ist, sondern die Konstante  $\Theta$ .

Die hier vorgestellte Elementformulierung beschränkt sich auf die hyperelastischen Materialmodelle, für die eine Verzerrungsenergiefunktion  $W(\bar{\mathbf{C}})$  existiert, aus der die Spannungen berechnet werden.  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$  ist der mit dem  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operator gebildete modifizierte rechte Cauchy-Green Tensor.

Ausgangspunkt bei der Herleitung des Q1P0-Elements ist das Dreifeldfunctional  $\Pi$ , das sich aus dem Anteil  $\Pi_{int}$  und dem (konservative äußere Lasten vorausgesetzt) Potential der äußeren Lasten  $\Pi_{ext}$  zusammensetzt. Der Index  $e$  an den Elementgrößen  $P$ ,  $\Theta$  und dem Elementvolumen wird fortgelassen, da keine Mißverständnisse entstehen können.

$$\Pi(\bar{\mathbf{u}}, \Theta, P) = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \Pi_{int}(\bar{\mathbf{u}}, \Theta, P) + \Pi_{ext}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (6.2)$$

$$\Pi_{int}(\bar{\mathbf{u}}, \Theta, P) := \int_{V_{ref}} [W(\bar{\mathbf{C}}) + P(J \Leftrightarrow \Theta)] dV_{ref}$$

Die Variationsgleichung  $\delta\Pi = \delta\Pi_{int} + \delta\Pi_{ext} = 0$  liefert zwei Bestimmungsgleichungen für die zwei inneren Freiheitsgrade im Element, den Druck  $P$  und die Volumenänderung  $\Theta$ .

$$\sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_{ref}} \left[ \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \delta \bar{\mathbf{C}} + \delta P(J \Leftrightarrow \Theta) + P(\delta J \Leftrightarrow \delta \Theta) \right] dV_{ref} + \Pi_{ext}(\delta \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.3)$$

Setzt man die Variationen von  $\bar{\mathbf{C}}$  und  $J$

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{C}} &= \frac{2\delta\Theta}{3\Theta} \bar{\mathbf{C}} + 2\bar{\mathbf{F}}^T \text{dev}[\delta\epsilon] \bar{\mathbf{F}} \\ \delta J &= J(\mathbf{1} \circ \delta\epsilon) \\ \delta\epsilon &:= \frac{1}{2}(\nabla \delta \bar{\mathbf{u}} + \nabla^T \delta \bar{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

in (6.3) ein und berücksichtigt, daß die Variationen  $\delta \bar{\mathbf{u}}$ ,  $\delta P$  und  $\delta \Theta$  voneinander unabhängig sind, erhält man ein System von drei Gleichungen. Die Gleichungen (6.6) und (6.7) müssen dabei in jedem Element erfüllt sein.

$$\sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_{ref}} \left[ 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \bar{\mathbf{F}}^T \text{dev}[\delta\epsilon] \bar{\mathbf{F}} + P J(\mathbf{1} \circ \delta\epsilon) \right] dV_{ref} + \Pi_{ext}(\delta \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.5)$$

$$\int_{V_{ref}} \left[ 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \circ \bar{\mathbf{C}} \frac{1}{3\Theta} \Leftrightarrow P \right] \delta \Theta dV_{ref} = 0 \quad (6.6)$$

$$\int_{V_{ref}} [J \Leftrightarrow \Theta] \delta P dV_{ref} = 0 \quad (6.7)$$

Die Gleichungen (6.5) und (6.6) können mit Hilfe der Definition des Kirchhoffschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{F}}^T 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}} \quad (6.8)$$

in der folgenden kompakten Form (6.9) und (6.10) dargestellt werden.

$$\sum_{e=1}^{n_{elm}} \int_{V_{ref}} [\boldsymbol{\tau} \circ \text{dev} [\delta \boldsymbol{\epsilon}] + P J (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon})] dV_{ref} + \Pi_{ext}(\delta \vec{\mathbf{u}}) = 0 \quad (6.9)$$

$$\int_{V_{ref}} \left[ \boldsymbol{\tau} \circ \mathbf{1} \frac{1}{3\Theta} \Leftrightarrow P \right] \delta \Theta dV_{ref} = 0 \quad (6.10)$$

Die Gleichungen (6.7) und (6.10) können für beliebige  $\delta \Theta$  und  $\delta P$  nur für

$$\Theta = \frac{1}{V_{ref}} \int_{V_{ref}} J dV_{ref} = \frac{V_t}{V_{ref}} \quad (6.11)$$

und

$$P = \frac{1}{V_{ref}} \frac{1}{3\Theta} \int_{V_{ref}} (\mathbf{1} \circ \boldsymbol{\tau}) dV_{ref} = \frac{1}{3V_t} \int_{V_{ref}} (\mathbf{1} \circ \boldsymbol{\tau}) dV_{ref} \quad (6.12)$$

erfüllt sein. Während die konstante Dilatation – unabhängig von einer speziellen Werkstoffmodellierung – durch den Quotienten aus dem momentanen Volumen  $V_t$  und dem Referenzvolumen  $V_{ref}$  gegeben ist, hängt der Elementdruck  $P$  selbstverständlich von der gewählten Materialformulierung ab.

$$\Theta = \frac{V_t}{V_{ref}} \quad ; \quad P = \frac{1}{3V_t} \int_{V_{ref}} (\mathbf{1} \circ \boldsymbol{\tau}) dV_{ref} \quad (6.13)$$

Nachdem der Druck  $P$  und die Dilatation  $\Theta$  bestimmt wurden, ist Gleichung (6.5) bzw. (6.9) eine nichtlineare Gleichung zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes.

## 6.2 Vergleich: Hybrid- und $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode

Nach den Ausführungen in Abschnitt 6.1 kann nun gezeigt werden, daß die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode nach Nagtegaal unter allen möglichen Elementformulierungen, die einen Operator der Form (6.1) für die Beseitigung der volumetrischen Versteifung benutzen, einen Sonderfall darstellt. Diese Methode ist die einzige, für die ein 3-Feld Hu-Washizu Funktional existiert, das neben der Volumenänderung  $\Theta$  auch den hydrostatischen Druck  $P$  bestimmt. Dieser Elementdruck berechnet sich nach (6.12), eine Beziehung, die nicht aus dem Materialgesetz hergeleitet werden kann.

Der Vergleich von (6.11) mit (5.62) in Abschnitt 5.6 zeigt, daß die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Operatoren des Q1P0-Elements und des Nagtegaalschen Elements identisch sind. Mit der Wahl von (6.11) als homogener Elementdilatation und für einen beliebigen im Element konstanten Druck  $P$ , reduziert sich der Ausdruck für  $\Pi_{int}$  in (6.2) auf die Formänderungsenergie des Elements. Einsetzen von  $\Theta_{nagt}$  in (6.2) ergibt (6.15).

$$\Pi_{int} = \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + \int_{V_{ref}} P(J \Leftrightarrow \Theta_{nagt}) dV_{ref} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + P \int_{V_{ref}} J dV_{ref} \Leftrightarrow P \frac{V_t}{V_{ref}} V_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + P \left( V_t \Leftrightarrow \frac{V_t}{V_{ref}} V_{ref} \right) \\ &= \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

(6.15) ist aber der Ausgangspunkt für die Aufstellung der Elementvektoren und Matrizen der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente in Abschnitt 5. Wegen (6.15) und der Identität von (6.11) und (5.62) besitzen das Q1P0-Element und das  $\bar{\mathbf{F}}$ -Element von Abschnitt 5.6 den gleichen Kraftvektor und dieselbe Tangentensteifigkeitsmatrix. Der Druck  $P$ , der aus der Variation des vollständigen Hu-Washizu Funktional folgt, ist durch (6.12) gegeben, d.h. nach Bestimmung der Verschiebungen und der Dilatation kann der Druck konsistent zu (6.2) berechnet werden.

Ist  $\Theta \neq \Theta_{nagt}$ , so reduziert sich (6.2) auch bei konstantem Druck nicht auf die Verformungsenergie (6.15), d.h. diese  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierungen besitzen keine variationelle Basis in der Form von (6.2). Der hydrostatische Druck dieser Elemente ist nicht bekannt und muß geeignet definiert (etwa nach (6.12) oder direkt aus dem Werkstoffgesetz berechnet werden. Die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode von *Moran et al.* [1990] soll an dieser Stelle als Beispiel für eine solche

versteifungsfreie Formulierung dienen.

$$\begin{aligned}
 \Pi_{int} &= \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + \int_{V_{ref}} P(J \Leftrightarrow \Theta_{morán}) dV_{ref} \\
 &= \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + P \int_{V_{ref}} J dV_{ref} \Leftrightarrow P J_c V_{ref} \\
 &= \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref} + P (V_t \Leftrightarrow J_c V_{ref}) \\
 &\neq \int_{V_{ref}} W(\bar{\mathbf{C}}) dV_{ref}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$



# Kapitel 7

## Elemente für volumetrisch-isochor entkoppelte Materialgesetze

Einfache und übersichtliche Verhältnisse, besonders für die Berechnung der Tangentensteifigkeitsmatrix, ergeben sich für Materialformulierungen, die in ihrem isochoren und volumetrischen Verhalten entkoppelt sind. Die vielfältigen Anwendungen dieser Klasse von Materialgesetzen und die gegenüber allgemeinen Stoffgesetzen (wie in Abschnitt 4-6) effizientere Programmierung der 8-Knoten Elemente rechtfertigt eine gesonderte Darstellung und Untersuchung. Darüberhinaus wurde ein wichtiges versteifungsfreies Element entwickelt, das SRI-Element, das entkoppelte Stoffgesetze voraussetzt.

Die Energiedichte  $W$  solcher Werkstoffmodelle setzt sich additiv aus einer alleine von der Gestaltsänderung abhängigen Anteil  $\hat{W}$  und einem nur von der Volumenänderung abhängigen Anteil  $U$  zusammen:  $W = \hat{W} + U$ . Die Funktion  $\hat{W}$  hängt von einem modifizierten rechten Cauchy-Green Tensor  $\hat{\mathbf{C}} := J^{-2/3} \mathbf{C}$  ab. Für die Determinante von  $\hat{\mathbf{C}}$  gilt dann wegen  $\det(\mathbf{C}) = J^2$ :  $\det(\hat{\mathbf{C}}) \equiv 1$ , unabhängig vom Verschiebungsfeld. Die volumetrische Verzerrungsenergiedichte  $U$  hängt dagegen alleine von der skalaren Größe  $J$  ab. Die Dilatation  $J$  ist gleich dem Quotienten der Volumenelemente in der Momentan- und der Referenzkonfiguration:  $J = dV_t/dV_{ref}$ .  $U(J)$  ist daher die alleine mit der Volumenänderung verknüpfte Energiedichte eines elastischen Körpers. Bei der Simulation mechanischer Belastungen nahezu inkompressibler Werkstoffe kann  $U$  als eine Penalty-Energiedichte interpretiert werden (siehe *Liu, Hofstetter, Mang* [1994]).

Die Herleitung der Gleichungen für die Variation der Formänderungsenergie  $\delta\Pi^{int}$  und für das Inkrement  $\Delta(\delta\Pi^{int})$  erfolgt zunächst für die klassische Verschiebungsmethode.

## 7.1 Verschiebungsmethode

Die Variation der Formänderungsenergie eines Elementes, deren Diskretisierung direkt zum inneren Elementkraftvektor führt,

$$\delta \Pi^{int} = \delta \int_{V_{ref}} [\hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) + U(J)] dV_{ref} \quad (7.1)$$

setzt sich aufgrund der entkoppelten Verzerrungsenergiedichte aus zwei Termen zusammen, die unabhängig voneinander berechnet werden können. Diese Tatsache wird sich bei der Untersuchung der Methoden zur Abschwächung des sog. „incompressibility-locking“ vorteilhaft auswirken.

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{int} &= \underbrace{\int_{V_{ref}} \delta \hat{W}(\hat{\mathbf{C}}) dV_{ref}}_{\delta \Pi_{dev}^{int}} + \underbrace{\int_{V_{ref}} \delta U(J) dV_{ref}}_{\delta \Pi_{vol}^{int}} \\ &= \delta \Pi_{dev}^{int} + \delta \Pi_{vol}^{int} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Eine Betrachtung der Definition der Cauchy-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  ergibt, daß sich aufgrund der Entkopplung der (elastischen) Verzerrungsenergie der Spannungstensor in einen deviatorischen Teil, der alleine von  $\hat{\mathbf{C}}$  abhängt, und einen kugelsymmetrischen Teil, der von  $J$  abhängt, additiv aufspalten läßt. Der hydrostatische Druck ist in dieser Werkstoffmodellierung gleich dem kugelsymmetrischen Anteil des Cauchy-Spannungstensors.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{J} \mathbf{F} \left[ \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{C}} \right] \mathbf{F}^T \\ &= \frac{2}{J} \mathbf{F} \left( (J)^{-2/3} \left[ \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \left( \mathbf{1} \circ \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \mathbf{F}^T \right) \right] + \frac{\partial U}{\partial J} \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \right) \mathbf{F}^T \\ &= \frac{2}{J} \left[ \hat{\mathbf{F}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \hat{\mathbf{F}}^T \Leftrightarrow \frac{1}{3} \mathbf{1} \left( \mathbf{1} \circ \hat{\mathbf{F}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \hat{\mathbf{F}}^T \right) \right] + \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \\ &= \frac{1}{J} \text{dev} \left[ \hat{\mathbf{F}} 2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\mathbf{C}}} \hat{\mathbf{F}}^T \right] + \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \\ &= \text{dev}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] + P \mathbf{1} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Voraussetzung für die Berechnung der Variationen  $\delta\Pi_{vol}^{int}$  und  $\delta\Pi_{dev}^{int}$  ist die Kenntnis der Variationen des rechten Cauchy-Green Tensors  $\mathbf{C}$  und der Dilatation  $J = \det(\mathbf{F})$  bzgl. des Verschiebungsfeldes. Diese Ausdrücke wurden bereits in Abschnitt 5 berechnet.

Nach diesen Vorbetrachtungen kann nun  $\delta\Pi^{int}$  berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi^{int} &= \int_{V_{ref}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} \circ \delta \mathbf{C} \, dV_{ref} & + \int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial J} \delta J \, dV_{ref} \\
 &= \int_{V_{ref}} \frac{1}{J} \mathbf{F}^T \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} J \, dV_{ref} & + \int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial J} J (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) \, dV_{ref} \\
 &= \int_{V_t} \text{dev}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dV_t & + \int_{V_t} P (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) \, dV_t
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\delta\Pi^{int} = \int_{V_t} (\text{dev}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] + P \mathbf{1}) \circ \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dV_t$$

(7.5)

In einem impliziten Verfahren zur Bestimmung der statischen Gleichgewichtslage ist es notwendig, die Ausdrücke  $\delta\Pi_{dev}^{int}$  und  $\delta\Pi_{vol}^{int}$  um die momentane geometrische Konfiguration zu linearisieren. Die Inkremente dieser Linearisierungen werden im folgenden mit  $\Delta(\delta\Pi_{dev}^{int})$  und  $\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int})$  bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 \Delta(\delta\Pi^{int}) &= \int_{V_{ref}} \Delta(\delta \hat{W}) \, dV_{ref} & + \int_{V_{ref}} \Delta(\delta U) \, dV_{ref} \\
 &= \Delta(\delta\Pi_{dev}^{int}) & + \Delta(\delta\Pi_{vol}^{int})
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Bei der Berechnung von  $\Delta(\delta\Pi_{dev}^{int})$  bzw.  $\Delta(\delta \hat{W})$  tritt das objektive Inkrement  $\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  des Deviators des Cauchy-Spannungstensors auf

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{4}{J} \mathbf{F} \left[ \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \mathbf{C}^2} \right] (\mathbf{F}^T \Delta \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}) \mathbf{F}^T, \tag{7.7}$$

das nach Einführung des Werkstoffensors  $\mathcal{C}_{dev}$  (Tensor vierter Stufe) auch als  $\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{C}_{dev} \Delta \boldsymbol{\epsilon}$  dargestellt werden kann.

Die Linearisierung von  $\delta\Pi_{dev}^{int}$  ergibt auf direktem Wege zwei Terme, von denen der erste die materiellen und der zweite die geometrischen Nichtlinearitäten zum Ausdruck bringt.

$$\begin{aligned}
\int_{V_{ref}} \Delta(\delta \hat{W}) dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \delta \mathbf{C} \circ \left[ \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \mathbf{C}^2} \right] \Delta \mathbf{C} dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} \circ \Delta(\delta \mathbf{C}) dV_{ref}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für  $\delta \mathbf{C}$ ,  $\Delta \mathbf{C}$  und  $\Delta(\delta \mathbf{C})$  aus (5.16) und (5.36)

$$\begin{aligned}
\int_{V_{ref}} \Delta(\delta \hat{W}) dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \frac{1}{J} (\mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}) \circ \left[ 4 \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial \mathbf{C}^2} \right] (\mathbf{F}^T \Delta \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{F}) J dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \frac{2}{J} \left[ \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \right] \circ \text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) J dV_{ref}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

und Verwendung der Definitionen von  $\text{dev}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}]$  und  $\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , erhält man schließlich für das Inkrement von  $\delta \Pi_{dev}^{int}$  als Endergebnis:

$$\boxed{\Delta(\delta \Pi_{dev}^{int}) = \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ \mathcal{C}_{dev} \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t + \int_{V_t} \text{dev}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}] \circ (\text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}})) dV_t} \tag{7.10}$$

Auf vollkommen analoge Weise kann das Inkrement der von  $U(J)$  abhängigen Variation  $\delta \Pi_{vol}^{int}$  berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\int_{V_{ref}} \Delta(\delta U) dV_{ref} &= \int_{V_{ref}} \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} J (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) J (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\
&+ \int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial J} J (\mathbf{1} \circ \Delta \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_{ref} \\
&\Leftrightarrow \int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial J} J \mathbf{1} \circ \text{grad}(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_{ref}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
\int_{V_{ref}} \Delta(\delta U) dV_{ref} &= \int_{V_t} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} J + \frac{\partial U}{\partial J} \right) \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t \\
&\Leftrightarrow \int_{V_t} \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \circ \text{grad}(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_t
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Der zweite Term in (7.12) kann mit Hilfe der folgenden Formel ( $\mathcal{I}$  ist der Einheitstensor 4ter Stufe) umgeformt werden.

$$\Leftrightarrow \mathbf{1} \circ \text{grad}(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) = + \mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) \Leftrightarrow 2 \delta \epsilon \circ \mathcal{I} \Delta \epsilon \quad (7.13)$$

In dem durch diese Umformung entstehenden Ausdruck für  $\Delta(\delta \Pi_{vol}^{int})$  erscheint der Materialoperator  $\mathcal{C}_{vol}$ .

$$\begin{aligned} \int_{V_{ref}} \Delta(\delta U) dV_{ref} &= \int_{V_t} \delta \epsilon \circ \underbrace{\left[ \left( J \frac{\partial^2 U}{\partial J^2} + \frac{\partial U}{\partial J} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2 \frac{\partial U}{\partial J} \mathcal{I} \right]}_{= \mathcal{C}_{vol}} \Delta \epsilon dV_t \\ &+ \int_{V_t} \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_t \end{aligned} \quad (7.14)$$

Der Tensor vierter Stufe  $\mathcal{C}_{vol}$  ist der Tangentenoperator, der den Deformationsgeschwindigkeitstensor (bzw. dessen Inkrement  $\Delta \epsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) + \text{grad}^T(\Delta \vec{\mathbf{u}}))$  mit der objektiven Truesdell-Rate des Druckes (bzw. dem Druckinkrement  $\Delta P$ ) verknüpft (siehe hierzu ausführlich *Crisfield* [1997]).

$$\Delta P \mathbf{1} = \mathcal{C}_{vol} \Delta \epsilon = \left[ \left( J \frac{\partial P}{\partial J} + P \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2 P \mathcal{I} \right] \Delta \epsilon \quad (7.15)$$

Das Endergebnis für  $\Delta(\delta \Pi_{vol}^{int})$  ist somit die Summe eines durch die materiellen und eines durch die geometrischen Nichtlinearitäten verursachten Terms.

$$\Delta(\delta \Pi_{vol}^{int}) = \int_{V_t} \delta \epsilon \circ \mathcal{C}_{vol} \Delta \epsilon dV_t + \int_{V_t} P [\mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}})] dV_t \quad (7.16)$$

In den folgenden Abschnitten werden Methoden vorgestellt, die die punktweise Auswertung von  $J$  und damit von  $P$  und  $\mathcal{C}_{vol}$  vermeiden. Auf diese Weise kann die für das 8-Knoten Verschiebungselement charakteristische Versteifung bei der Verformung inkompressibler bzw. quasi-inkompressibler Werkstoffe unterdrückt werden. Diese Modifikationen an der Verschiebungsformulierung verändern aber nur  $\Delta(\delta \Pi_{vol}^{int})$  und  $\delta \Pi_{vol}^{int}$ . Die Terme  $\Delta(\delta \Pi_{dev}^{int})$  und  $\delta \Pi_{dev}^{int}$  sind in allen folgenden Formulierungen identisch. Diese Folge der Aufspaltung der Verzerrungsenergiedichte in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil vereinfacht somit auch die Herleitung der Tangentensteifigkeitsmatrizen.

## 7.2 Selektiv Reduzierte Integration (SRI)

Das konventionelle 8-Knoten Verschiebungselement ist aufgrund der Versteifung bei inkompressiblen Werkstoffen nur sehr begrenzt einsetzbar. Diese unerwünschte Versteifung, das sog. „incompressibility-locking“, wird von den ortsabhängigen Anteilen des diskretisierten Deformationstensors bzw. Verschiebungsgradienten verursacht. Diese im Element inhomogenen Anteile bewirken, daß die Zwangsbedingung  $J \Leftrightarrow 1 = 0$  bei isochoren Deformationen nicht eingehalten werden kann. Am Elementmittelpunkt dagegen, wo nur homogene Deformationsanteile berechnet werden können, wird die Zwangsbedingung für inkompressibles Materialverhalten erfüllt. Es ist daher naheliegend die volumetrischen Anteile in  $\delta\Pi^{int}$  und  $\Delta(\delta\Pi^{int})$  nur am Elementmittelpunkt auszuwerten. Da nur auf die Integrale, deren Integrand den Druck  $P$  bzw. die Ableitung  $\frac{\partial P}{\partial J}$  enthalten, die 1-Punkt Integration angewendet wird, handelt es sich bei dieser Methode um eine selektiv reduzierte Integration. Diese „Selective Reduced Integration“ (SRI) Methode wurde zuerst von *Hughes, Malkus* [1978] für lineare Probleme entwickelt. Bei der „Uniformly Reduced Integration“ (URI) Methode werden alle Terme unterintegriert. Auf diese Weise wird die Elementversteifung bei Inkompressibilität ebenfalls unterdrückt, jedoch müssen spezielle Maßnahmen ergriffen werden, um die Elementstabilität zu sichern (siehe z.B. *Bonet, Bhargava* [1995]).

Nach den obigen Ausführungen ergibt sich somit für  $\delta\Pi^{int}$  in der SRI-Methode

$$[\delta\Pi^{int}]_{\text{SRI}} = \delta\Pi_{dev}^{int} + P_c (\mathbf{1} \circ \delta\epsilon_c) \int_{V_t} dV_t, \quad (7.17)$$

wobei der Index  $c$  bedeutet, daß die entsprechenden Größen am Elementmittelpunkt berechnet werden. Die Linearisierung von  $\delta\Pi_{vol}^{int}$  wird ebenfalls nur am Elementmittelpunkt ausgewertet. Hierzu ist zu bemerken, daß bei Anwendung der selektiv reduzierten Integration auf nur eine der Größen  $\delta\Pi_{vol}^{int}$  oder  $\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int})$  die Konvergenzrate in einem Newton-Raphson Verfahren erheblich vermindert würde (siehe hierzu *Liu, Hofstetter, Mang* [1994]).

$$\begin{aligned} [\Delta(\delta\Pi^{int})]_{\text{SRI}} &= \Delta(\delta\Pi_{dev}^{int}) \\ &+ \delta\epsilon_c \circ [\mathcal{C}_{vol}]_c \Delta\epsilon_c \int_{V_t} dV_t \\ &+ P_c [\mathbf{1} \circ \text{grad}_c^T(\delta\vec{u}) \text{grad}_c(\Delta\vec{u})] \int_{V_t} dV_t \end{aligned} \quad (7.18)$$

Das aktuelle Elementvolumen  $V_t$  kann entweder auf analytischem Wege exakt bestimmt oder wie in der ursprünglichen SRI-Formulierung durch  $8j_t(o)$  angenähert werden. Der

Vorteil bzgl. der Effizienz bei der zweiten Methode liegt darin, daß die Determinante  $j_t$  der Jacobi-Matrix (der Transformation vom Würfel der Kantenlänge 2 zum Element in der Momentankonfiguration) nur am Elementmittelpunkt berechnet werden muß.

$$V_t = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} j_t dr ds dt \approx 8 j_t(o) = 8 J_c j_{ref}(o) \quad (7.19)$$

Dies erfordert deutlich weniger Rechenoperationen und damit weniger Rechenzeit als die Berechnung des exakten Elementvolumens. Allerdings wird mit zunehmender Abweichung der momentanen Elementgeometrie von einem Parallelepiped die Differenz  $V_t \Leftrightarrow 8 j_t(o)$  immer größer.

### 7.3 Kombination mit $\bar{\mathbf{F}}$ -Methoden

In einer  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung wird der kompatible Deformationstensor durch einen Operator mit konstanter Determinante ersetzt. Wie bereits ausführlich beschrieben wurde, wird auf diese Weise alleine der volumetrische Anteil  $\mathbf{F}_{vol}$  des Deformationstensors der Verschiebungsformulierung modifiziert.

$$\bar{\mathbf{F}} = \underbrace{\Theta^{1/3} \mathbf{1}}_{\bar{\mathbf{F}}_{vol}} \underbrace{J^{-1/3} \mathbf{F}}_{\mathbf{F}_{iso}} = \left( \frac{\Theta}{J} \right)^{1/3} \mathbf{F} \quad (7.20)$$

Im Gegensatz zur konventionellen Verschiebungsformulierung ist dann die Determinante des Deformationstensors im Element konstant. Diese Determinante ist identisch mit der Dilatation  $\Theta$ :

$$\det(\bar{\mathbf{F}}) = \Theta \quad . \quad (7.21)$$

Der Aufwand für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix kann wesentlich gegenüber der allgemeinen Formulierung, d.h. der Formulierung für allgemeine gekoppelte Werkstoffgesetze, gesenkt werden, wenn die spezielle Struktur der Energiedichte beachtet wird:  $W = \hat{W} + U$ . Die Funktion  $\hat{W}$  hängt alleine vom isochoren Anteil von  $\bar{\mathbf{F}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{C}}$  ab. Der Operator  $\mathbf{F}_{iso}$  in Gleichung (7.20) beschreibt reine Gestaltänderungen ohne Volumenänderungen und wird von der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode nicht verändert. Die Funktion  $\hat{W}(\mathbf{C}_{iso})$ , die Variation  $\delta \Pi_{int}^{dev}$  und das Inkrement  $\Delta(\delta \Pi_{int}^{dev})$  sind daher in der konventionellen Verschiebungs- und der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung identisch. Diese Tatsache ermöglicht es, die folgende Untersuchung auf die volumetrischen Anteile an der virtuellen Verformungsenergie und ihrer Linearisierung zu beschränken.

$$\delta\Pi_{vol}^{int} = \int_{V_{ref}} \delta U(\Theta) dV_{ref} = \int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \delta\Theta dV_{ref} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\Pi_{vol}^{int}) &= \int_{V_{ref}} \Delta[\delta U(\Theta)] dV_{ref} \\ &= \int_{V_{ref}} \delta\Theta \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} \Delta\Theta dV_{ref} + \int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \Delta[\delta\Theta] dV_{ref} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Wegen der Ortsunabhängigkeit im Element können die Integranden aus den Integralen von  $\delta\Pi_{vol}^{int}$  und  $\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int})$  herausgezogen werden.

$$\delta\Pi_{int}^{vol} = \frac{\partial U}{\partial \Theta} \delta\Theta \int_{V_{ref}} dV_{ref} \quad (7.24)$$

$$\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int}) = \delta\Theta \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} \Delta\Theta \int_{V_{ref}} dV_{ref} + \frac{\partial U}{\partial \Theta} \Delta[\delta\Theta] \int_{V_{ref}} dV_{ref} \quad (7.25)$$

Das Referenzvolumen eines Elementes kann auf analytischem Weg exakt berechnet werden. Es besteht deshalb kein zwingender Grund, das Elementvolumen näherungsweise zu bestimmen. Ersetzt man die Integrale in den Gleichungen (7.24) und (7.25) durch das Volumen der Ausgangskonfiguration, so erhält man die nachfolgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{int}^{vol} &= \frac{\partial U}{\partial \Theta} \delta\Theta V_{ref} \\ \Delta(\delta\Pi_{vol}^{int}) &= \delta\Theta \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} \Delta\Theta V_{ref} + \frac{\partial U}{\partial \Theta} \Delta[\delta\Theta] V_{ref} \end{aligned}$$

(7.26)



### 7.3.1 $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode nach Moran

Die allgemeinen Ausführungen zur  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methode werden nun beispielhaft auf die Formulierung von *Moran et. al* [1990] angewandt. Das Wesentliche an dieser Vorgehensweise ist die Auswertung der Dilatation nur am Elementmittelpunkt.

$$\Theta = J_c = \det(\mathbf{F}_c) \quad (7.27)$$

Die als hydrostatischer Druck definierte Größe  $P := \frac{\partial U}{\partial \Theta}$  ist dann ebenfalls im Element konstant. Nach der Berechnung der Variation von  $\Theta$

$$\delta \Theta = \delta J_c = J_c (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c) \quad (7.28)$$

kann mit Gleichung (7.26a) die Variation der volumetrischen Verformungsenergie bestimmt werden.

$$\delta(\Pi_{int}^{vol}) = P (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c) J_c V_{ref} \quad (7.29)$$

Das Inkrement von  $\delta \Theta$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \Theta) &= \Leftrightarrow J_c (\mathbf{1} \circ \text{grad}_c(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})) + J_c (\mathbf{1} \circ \Delta \epsilon_c) (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon_c) \\ &= + J_c (\mathbf{1} \circ \text{grad}_c^T \delta(\vec{\mathbf{u}}) \text{grad}_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})) + J_c \delta \epsilon_c \circ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2 \mathcal{I}) \Delta \epsilon_c \end{aligned} \quad (7.30)$$

wird für die Berechnung des Inkrementes von  $\delta \Pi_{int}^{vol}$  benötigt.

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \Pi_{int}^{vol}) &= J_c V_{ref} P (\mathbf{1} \circ \text{grad}_c^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})) + \\ &\quad J_c V_{ref} \delta \epsilon_c \circ \underbrace{\left[ \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \left( \frac{\partial U}{\partial J_c} + J_c \frac{\partial^2 U}{\partial J_c^2} \right) \Leftrightarrow 2 P \mathcal{I} \right]}_{\mathcal{C}_{vol}^c} \Delta \epsilon_c \\ &= J_c V_{ref} P_c (\mathbf{1} \circ \text{grad}_c^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}_c(\Delta \vec{\mathbf{u}})) + \\ &\quad J_c V_{ref} \delta \epsilon_c \circ \mathcal{C}_{vol}^c \Delta \epsilon_c \end{aligned} \quad (7.31)$$

Der Vergleich der Ausdrücke für  $\delta \Pi_{int}^{vol}$  und  $\Delta(\delta \Pi_{int}^{vol})$  in der SRI- und der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung mit  $\det(\bar{\mathbf{F}}) = J_c$  zeigt, daß sich diese Ausdrücke nur geringfügig unterscheiden. Die Differenz ist letztlich nur durch die unterschiedliche Berechnung des momentanen Elementvolumens bedingt. Während in der SRI-Methode das exakte Elementvolumen  $V_t$  berechnet werden kann, wird dieses in der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Formulierung durch  $J_c V_{ref}$  approximiert. Die Näherung stimmt für homogene Deformationen, die durch einen konstanten Deformationstensor und damit  $J \equiv J_c$  charakterisiert sind, mit dem aktuellen Elementvolumen  $V_t$  exakt überein. Der innere Knotenkraftvektor ( $\delta \Pi_{int}^{vol} = \delta \vec{\mathbf{u}}_e^T \vec{\mathbf{f}}_{vol}$ ) und die Tangentensteifigkeitsmatrix

$(\Delta[\delta\Pi_{int}^{vol}] = \delta\vec{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_{vol} \vec{\mathbf{u}}_e)$  der beiden Formulierungen unterscheiden sich alleine in einem Vorfaktor.

$$\boxed{\mathbf{K}_{sri} = \frac{1}{J_c} \frac{V_t}{V_{ref}} \mathbf{K}_{moran} \quad \vec{\mathbf{f}}_{sri} = \frac{1}{J_c} \frac{V_t}{V_{ref}} \vec{\mathbf{f}}_{moran}} \quad (7.32)$$

## 7.4 Hybrid-Formulierung

Die Hybrid-Formulierung mit unabhängigem Druck-, Dilatations- und Verschiebungsfeld basiert auf dem Hu-Washizu Funktional  $\Pi_{hybrid}^{int}$ . Der Summand  $\Pi_{dev}^{int}$  ist identisch mit der isochoren Verzerrungsenergie in Abschnitt 7.1 .

$$\begin{aligned} \Pi_{hybrid}^{int} &= \Pi_{dev}^{int} + \int_{V_{ref}} (U(\Theta) + P(J \Leftrightarrow \Theta)) dV_{ref} \\ \delta\Pi_{hybrid}^{int} &= \delta\Pi_{dev}^{int} + \int_{V_{ref}} \left[ \frac{\partial U}{\partial \Theta} \delta\Theta + \delta P(J \Leftrightarrow \Theta) + P(\delta J \Leftrightarrow \delta\Theta) \right] dV_{ref} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Die Variation des Hu-Washizu Funktionals ergibt aufgrund der Unabhängigkeit der Variationen für  $\Theta$ ,  $P$  und  $\vec{\mathbf{u}}$  ein System von drei Gleichungen.

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{dev}^{int} + \overbrace{\int_{V_{ref}} P(\mathbf{1} \circ \delta\epsilon) J dV_{ref}}^{=\delta\Pi_{vol}^{int}} + \delta\Pi^{ext}(\vec{\mathbf{u}}) &= 0 \\ \int_{V_{ref}} \delta\Theta \left( \frac{\partial U}{\partial \Theta} \Leftrightarrow P \right) dV_{ref} &= 0 \\ \int_{V_{ref}} \delta P(J \Leftrightarrow \Theta) dV_{ref} &= 0 \end{aligned} \quad (7.34)$$

Aus Gl. (7.34b) und (7.34c) kann der konstante Druck und die konstante Dilatation als Funktion des Verschiebungsfeldes bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\int_{V_{ref}} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \Leftrightarrow P dV_{ref} &= 0 \quad \Rightarrow P = \frac{\partial U}{\partial \Theta} \\
\int_{V_{ref}} (J \Leftrightarrow \Theta) dV_{ref} &= 0 \quad \Rightarrow \Theta = \frac{1}{V_{ref}} \int_{V_{ref}} J dV_{ref}
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Ein iteratives Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Gleichung (7.34a) verlangt die Berechnung des Inkrements von  $\delta \Pi_{vol}^{int}$ .

$$\begin{aligned}
\Delta[\delta \Pi_{vol}^{int}] &= \Delta P \int_{V_t} (\mathbf{1} \circ \delta \boldsymbol{\epsilon}) dV_t \\
&+ P \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2\mathcal{I}) \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t \\
&+ P \int_{V_t} \mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_t
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Nach Einsetzen des Ausdrucks für das Druckinkrement

$$\Delta P = \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} \Delta \Theta = \frac{U''}{V_{ref}} \int_{V_t} (\Delta \boldsymbol{\epsilon} \circ \mathbf{1}) dV_t \quad \text{mit} \quad ' := \frac{\partial}{\partial \Theta} \tag{7.37}$$

ergibt sich ein nur von den Verschiebungen und ihren Variationen abhängiger Ausdruck für das Inkrement  $\Delta[\delta \Pi_{vol}^{int}]$ .

$$\begin{aligned}
\Delta[\delta \Pi_{vol}^{int}] &= \frac{U''}{V_{ref}} \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \int_{V_t} \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t \\
&+ P \int_{V_t} \delta \boldsymbol{\epsilon} \circ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2\mathcal{I}) \Delta \boldsymbol{\epsilon} dV_t \\
&+ P \int_{V_t} \mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta \vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta \vec{\mathbf{u}}) dV_t
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Um den volumetrischen Anteil der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{vol}$  und des Knotenkraftvektors  $\vec{\mathbf{f}}_{vol}$  explizit zu erhalten, muß das Verschiebungsfeld diskretisiert werden.  $\mathbf{K}_{vol}$  kann dann

als Summe von drei Termen dargestellt werden, was für die Stabilitätsuntersuchungen in Abschnitt 8 zweckmäßig ist.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{vol} &= \frac{U''}{V_{ref}} \int_{V_t} \mathbf{B}^T dV_t [\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon}] \int_{V_t} \mathbf{B} dV_t & \vec{\mathbf{f}}_{vol} &= U' \int_{V_t} \mathbf{B}^T \vec{\epsilon} dV_t \\
&+ P \int_{V_t} \mathbf{B}^T (\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B} dV_t \\
&+ P \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV_t
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Die isochoren Anteile der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementkraftvektors sind identisch mit den entsprechenden Größen des Standard-Elements (siehe Abschnitt 7.1) und brauchen an dieser Stelle nicht wiederholt werden.

## 7.5 Die Methode von Crisfield

Von *Crisfield* [1997] stammt eine Element-Formulierung, die trotz eines anderen Ansatzes nur einen Spezialfall des in Abschnitt 7.4 beschriebenen Q1P0-Elements darstellt. Ausgangspunkt der Überlegungen von Crisfield ist die Variation der Verformungsenergie.

$$\delta \Pi^{int} = \delta \Pi_{dev}^{int} + \underbrace{\int_{V_{ref}} P J (\mathbf{1} \circ \delta \epsilon) dV_{ref}}_{=: \delta \Pi_{vol}^{int}} \tag{7.40}$$

Der Unterschied zur konventionellen Verschiebungsformulierung besteht darin, daß der hydrostatische Druck  $P$  in (7.40) zunächst noch unbestimmt ist. Um die volumetrische Versteifung zu vermeiden, wird der Druck nicht punktweise aus der Energiedichte  $U(J)$  berechnet sondern aus der folgenden Nebenbedingung für (7.40) bestimmt.

$$\boxed{\int_{V_{ref}} [P \Leftrightarrow K (J \Leftrightarrow 1)] dV_{ref} = 0} \tag{7.41}$$

Im Falle einer Elementformulierung mit konstantem Druck kann  $P$  aus (7.41) explizit berechnet werden.

$$P = \frac{K}{V_{ref}} \int_{V_{ref}} (J \Leftrightarrow 1) dV_{ref} = K \left( \frac{V_t}{V_{ref}} \Leftrightarrow 1 \right) \quad (7.42)$$

Die Konstante  $K$  in Gleichung (7.41) und (7.42) entspricht dem Kompressionsmodul eines quasi-inkompressiblen Werkstoffs oder dem Penalty-Parameter für inkompressibles Materialverhalten.

Der Druck in (7.42) ist eine lineare Funktion des Quotienten  $\Theta = V_t/V_{ref}$  aus Momentan- und Referenzvolumen.  $P$  kann daher als Ableitung einer in  $\Theta$  quadratischen Funktion  $U$  dargestellt werden.

$$U = \frac{1}{2} K (\Theta \Leftrightarrow 1)^2 \quad \implies \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta} = K (\Theta \Leftrightarrow 1) = P \quad (7.43)$$

Der Vergleich von (7.43) mit (7.35) und von (7.40) mit (7.34) zeigt, daß die Methode von Crisfield kein neues Element liefert. Daher ist es auch nicht notwendig die volumetrische Steifigkeitsmatrix herzuleiten. Das Element, das ausgehend von (7.40) und (7.41) konstruiert werden kann, ist ein Q1P0-Element mit einer speziellen volumetrischen Energiedichte gemäß (7.43).

## 7.6 Eine Variante der Crisfield-Methode

Die Vorgehensweise von Crisfield bei der Formulierung eines versteifungsfreien 8-Knoten Elementes besteht wie erläutert darin, den Druck  $P$  in der Variation der Verzerrungsenergie bzw. dem inneren Knotenkraftvektor der konventionellen Verschiebungsmethode nicht punktweise aus der volumetrischen Energiedichte zu berechnen. Der Druck  $P$  wird dagegen aus der Nebenbedingung in Gl. (7.41) bestimmt. Statt Gl. (7.41) bzw. (7.42), in der der Druck von einer mittleren Dilatation  $V_t/V_{ref}$  abhängt, kann der Druck auch nach der folgenden Gleichung berechnet werden.

$$P = K (J_c \Leftrightarrow 1) \quad J_c := [\det(\mathbf{F})]_c \quad (7.44)$$

Die Berechnung des im Element konstanten Elementdruckes erfordert dann nur die Auswertung der Determinante des  $\mathbf{F}$ -Tensors am Elementmittelpunkt. Der Berechnungsaufwand wird durch (7.44) gegenüber dem Q1P0- und dem Crisfield-Element erheblich reduziert. Bei Verwendung mit einem expliziten Verfahren, für das nur der Elementkraftvektor aufgestellt wird, besteht der einzige Nachteil dieser Methode darin, daß der sog. Patch-Test nicht für beliebige Referenzgeometrien erfüllt werden kann. Bei impliziten Verfahren

hingegen wird auch die Tangentensteifigkeitsmatrix benötigt. Diese ergibt sich aus dem Inkrement von  $\delta\Pi_{vol}^{int}$ .

$$\begin{aligned}\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int}) &= \Delta P \int_{V_t} (\mathbf{1} \circ \delta\epsilon) dV_t \\ &+ P \int_{V_t} \delta\epsilon \circ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2\mathcal{I}) \Delta\epsilon dV_t \\ &+ P \int_{V_t} \mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta\vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta\vec{\mathbf{u}}) dV_t\end{aligned}\tag{7.45}$$

Nach Einsetzen des Ausdrucks für das Druckinkrement  $\Delta P = K J_c (\mathbf{1} \circ \Delta\epsilon_c)$  in (7.45) erhält man die endgültige Form von  $\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int})$ .

$$\begin{aligned}\Delta[\delta\Pi_{vol}^{int}] &= K J_c \int_{V_t} \delta\epsilon dV_t \circ [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \Delta\epsilon_c \\ &+ P \int_{V_t} \delta\epsilon \circ (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \Leftrightarrow 2\mathcal{I}) \Delta\epsilon dV_t \\ &+ P \int_{V_t} \mathbf{1} \circ \text{grad}^T(\delta\vec{\mathbf{u}}) \text{grad}(\Delta\vec{\mathbf{u}}) dV_t\end{aligned}\tag{7.46}$$

Der erste Term in (7.46) ist für einen schwerwiegenden Nachteil verantwortlich, der auch bei der sog. inkonsistenten Elementformulierung von *de Souza Neto et. al* [1996] auftritt: die volumetrische Steifigkeitsmatrix ist nicht symmetrisch. Nach der Diskretisierung des Verschiebungsfeldes erhält man aus  $\Delta(\delta\Pi_{vol}^{int})$  die volumetrische Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{vol}$ , die aufgrund des ersten Terms in (7.47) unsymmetrisch ist.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{vol} &= K J_c \left[ \int_{V_t} \mathbf{B}^T dV_t \right] (\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}) \mathbf{B}_c \\ &+ P \int_{V_t} \mathbf{B}^T (\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B} dV_t \\ &+ P \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV_t\end{aligned}\tag{7.47}$$

Da die volumetrische Steifigkeitsmatrix nicht symmetrisch ist, ist die Elementsteifigkeitsmatrix und folglich die Gesamtsteifigkeitsmatrix der Struktur unsymmetrisch. Der Aufwand für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems ist aus diesem Grund erheblich

größer als beim Q1P0-Element. Nach der Auffassung von *Crisfield* [1997] ist diese Elementformulierung nur ein Spezialfall der inkonsistenten Methode von *de Souza Neto et al.* [1996]. D.h. diese Methode sollte bei praktischen Berechnungen nicht für hyperelastische Materialformulierungen verwendet werden. Entstehen aber bei der Linearisierung der äußeren Kräfte unsymmetrische Laststeifigkeitsmatrizen (siehe hierzu ausführlich *Schweizerhof* [1982]), so ist die Struktursteifigkeitsmatrix unabhängig von der Elementformulierung unsymmetrisch. In diesem Fall könnte die in Abschnitt 7.6 erläuterte Variante des Ansatzes von *Crisfield* durchaus effizient eingesetzt werden.

# Kapitel 8

## Stabilitätsuntersuchung

Leider stößt man bei der Anwendung vieler moderner Finiter Elemente auf einige Schwachstellen, die sich oft erst bei Beispielberechnungen herausstellen. Ein besonders unangenehmer Gesichtspunkt der in dieser Dissertation vorgestellten nichtlinearen 8-Knoten Elemente sollte daher nicht verschwiegen werden. Dies ist das im folgenden Abschnitt diskutierte sog. „hour-glassing“. Es handelt sich dabei um einen Rangabfall der Element- und Struktursteifigkeitsmatrix bei bestimmten Deformationszuständen, der nicht durch eine physikalische Instabilität verursacht wird. Die Ursache der numerischen Instabilität nichtlinearer versteifungsfreier Elemente, wie das SRI- und das Q1P0-Element, liegt alleine in dem von dem klassischen Verschiebungselement abweichenden Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix. Die genaue Betrachtung zeigt, daß die durch einen Rangabfall der Steifigkeitsmatrix verursachte Instabilität beim Standard-Verschiebungselement nicht auftritt. Der Vergleich der Steifigkeitsmatrizen von SRI- und Q1P0-Element mit der des Verschiebungselements (im folgenden mit DISP abgekürzt) führt dann aber auch zu einer Lösung, mit der die Aktivierung des Rangabfalls verhindert werden kann.

Der hier gewählte Ansatz unterscheidet sich grundlegend von demjenigen, den z. B. *Wriggers und Reese* [1994], *Korelc und Wriggers* [1996] sowie *Glaser und Armero* [1997] verwendeten. Sie untersuchten die numerische Instabilität von EAS-Elementen mit Hilfe einer symbolischen Eigenwertanalyse. Leider ist diese Vorgehensweise auf zweidimensionale 4-Knoten Elemente beschränkt, da trotz moderner Computeralgebra-Programme wie MAPLE oder MATHEMATICA der Aufwand bei der Berechnung der Eigenwerte und der zugehörigen Eigenformen für 3D Volumenelemente sehr groß ist: das ebene 4-Knoten Element besitzt zwei Eigenwerte, die von den EAS-Parametern beeinflußt werden, das dreidimensionale 8-Knoten Element besitzt neun bzw. zwölf solcher Eigenwerte.

Für die Einbeziehung des SRI-Elementes in die Stabilitätsuntersuchung ist es notwendig, sich ausschließlich auf Werkstoffgesetze mit vollständig entkoppelten volumetrischen und isochoren Anteilen zu beschränken. Die volumetrischen Steifigkeitsmatrizen sind dann für den oben erwähnten Vergleich vollkommen ausreichend, da die isochoren Anteile der Elementsteifigkeitsmatrizen der in diesem Abschnitt behandelten Elementformulierungen (einschließlich der Standard-Methode) identisch sind. Um den Blick auf das Wesentliche



nicht zu verstellen, ist die Diskussion auf Elemente beschränkt, die in der Referenzkonfiguration Parallelepipede sind. Die Tangentensteifigkeitsmatrizen sind für diesen Spezialfall einfach aufgebaut. Die Deformationen, bei denen „hour-glassing“ Verschiebungsmuster besonders ausgeprägt auftreten, sind homogene Kompressionen. Es genügt daher, im folgenden homogene Verformungen zu betrachten.

In Abschnitt 8.1 wird zuerst das Q1P0-Element ausführlich untersucht. Anschließend erfolgt eine Analyse des SRI-Elementes analog zum Q1P0-Element. Mit Hilfe der Ausführungen in Abschnitt 8.1 und 8.2 kann dann eine für praktische Zwecke geeignete Stabilisierung konstruiert werden. Dieses Verfahren wird in den Abschnitten 8.31 und 8.4 in numerischen Simulationen getestet.

## 8.1 Instabilität des Q1P0-Elements

Als erste Formulierung wird das auf der Hybrid-Methode basierende Q1P0-Element untersucht. In der Tabelle (8.3) sind die drei Summanden von  $\mathbf{K}_{vol}^{DISP}$  und  $\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}$  gegenübergestellt. Die Deformation im Element ist homogen ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c$ ,  $\det(\mathbf{F})=J_c$ ) und aufgrund von

$$\Theta = \frac{V_t}{V_{ref}} = J_c \frac{V_{ref}}{V_{ref}} = J_c \quad (8.1)$$

ist der Druck in  $\mathbf{K}_{vol}^{DISP}$  konstant und identisch mit dem Druck in  $\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}$ .

$$P_{DISP} := \frac{\partial U}{\partial J} \equiv P_{Q1P0} := \frac{\partial U}{\partial \Theta} \quad (8.2)$$

Der zweite und der dritte Term von  $\mathbf{K}_{vol}^{DISP}$  und  $\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}$  in (8.3) sind aufgrund der Gleichheit des Druckes in beiden Methoden identisch. Die beiden Formulierungen unterscheiden sich dann einzig im ersten Term, der mit  $[\mathbf{K}_{vol}^{DISP}]_1$  bzw.  $[\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}]_1$  bezeichnet wird.

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{vol}^{DISP} = & \mathbf{K}_{vol}^{Q1P0} = \\ \hline \boxed{J_c U'' \int_{V_t} \mathbf{B}^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B} dV_t} & \boxed{\frac{U''}{V_{ref}} \int_{V_t} \mathbf{B}^T dV_t [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \int_{V_t} \mathbf{B} dV_t} \\ + & + \\ P_c \int_{V_t} \mathbf{B}^T (\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B} dV_t & P_c \int_{V_t} \mathbf{B}^T (\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B} dV_t \\ + & + \\ P_c \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV_t & P_c \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV_t \end{array} \quad (8.3)$$

Die Ursache für die numerische Instabilität der versteifungsfreien Methode ist die von  $[\mathbf{K}_{vol}^{DISP}]_1$  abweichende Struktur der Matrix  $[\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}]_1$ . Deshalb muß diese Matrix genau analysiert werden.

Beachtet man, daß die  $\mathbf{B}$ -Matrix aus einem konstanten Anteil  $\mathbf{B}_c$  und einem in den natürlichen Koordinaten linearen Anteil  $\mathbf{B}_h$  besteht, das Element in der Ausgangskonfiguration ein Parallelepiped und die Deformation homogen ist, d.h.

$$\int_{V_t} \mathbf{B}_h dV_t = \mathbf{0} \quad , \quad (8.4)$$

so folgt daraus:

$$\int_{V_t} (\mathbf{B}_c + \mathbf{B}_h) dV_t = \mathbf{B}_c V_t = \mathbf{B}_c J_c V_{ref} \quad . \quad (8.5)$$

Die Auswirkung von Gl. (8.5) auf die Matrizen  $[\mathbf{K}_{vol}^{DISP}]_1$  und  $[\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}]_1$  ergibt sich aus der folgenden Gegenüberstellung.

$$[\mathbf{K}_{vol}^{DISP}]_1 = J_c U'' V_t \mathbf{B}_c^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B}_c + \boxed{J_c U'' \int_{V_t} \mathbf{B}_h^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B}_h dV_t} \quad (8.6)$$

$$[\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}]_1 = J_c U'' V_t \mathbf{B}_c^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B}_c \quad (8.7)$$

Die eingerahmte Teilmatrix von  $[\mathbf{K}_{vol}^{DISP}]_1$  in (8.6) ist die Differenz zwischen der Steifigkeitsmatrix der Verschiebungsmethode und der Hybridmethode. Da sich die beiden Formulierungen (unter den oben genannten Voraussetzungen) alleine in diesem Ausdruck unterscheiden, muß das Fehlen von

$$\mathbf{K}_{stab} := J_c U'' \int_{V_t} \mathbf{B}_h^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B}_h dV_t \quad (8.8)$$

in  $\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}$  den Rangabfall der Element- und Struktursteifigkeitsmatrix der Hybridmethode verursachen.

Die Matrix  $\mathbf{K}_{stab}$  soll nun explizit berechnet werden. Ziel ist es, (8.8) als eine sog. „hourglass“ Stabilisierungsmatrix darzustellen (siehe z.B. *Belytschko, Bindeman* [1993]). Diese Matrizen, die ursprünglich für die „Uniform Reduced Integration“ Methode (*Hughes, Malkus* [1978]) konstruiert wurden, sollen den Rang der Elementsteifigkeitsmatrix sichern. Im vorliegenden Fall kann diese Matrix durch Auswertung von (8.8) systematisch gefunden werden.

Berücksichtigt man die Blockstruktur der Matrix  $\mathbf{B}_h$  und die Besetzungsstruktur der Matrix  $\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}$

$$\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.9)$$

so ergibt sich für die  $3 \times 3$  Blockmatrizen, aus denen sich die Matrix  $\mathbf{K}_{stab}$  zusammensetzt, das folgende Resultat ( $i, j=1..8$ ):

$$\mathbf{K}_{stab}^{ij} := J_c U'' \int_{V_t} \mathbf{B}_{h,i}^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B}_{h,j} dV_t = J_c U'' \int_{V_t} \nabla_t N_h^i \otimes \nabla_t N_h^j dV_t \quad . \quad (8.10)$$

Die Integration kann analytisch ausgeführt werden, wenn der lineare Zusammenhang zwischen dem Gradienten bzgl. aktueller Koordinaten  $\nabla_t$  und dem Gradienten bzgl. natürlicher Koordinaten  $\nabla_\xi$  beachtet wird ( $\nabla_{ref}$  in (8.11) ist der Gradient bzgl. der Koordinaten in der Ausgangskonfiguration).

$$\nabla_t N_h^i = \mathbf{F}^{-T} \nabla_{ref} N_h^i = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{J}_{ref}^{-1} \nabla_\xi N_h^i = \mathbf{D} \nabla_\xi N_h^i \quad (8.11)$$

Selbstverständlich ist diese lineare Beziehung nur unter der Voraussetzung gegeben, daß die Deformation  $\mathbf{F}$  homogen und die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_{ref}$  konstant ist.

Der Gradient der linearen Formfunktionen  $\nabla_\xi N_h^i$  ( $i=1..8$ ) ist eine Funktion der vier „hourglass“ Vektoren  $\vec{\mathbf{h}}_1 \dots \vec{\mathbf{h}}_4$ .

$$\nabla_\xi N_h^i = \begin{bmatrix} s \\ r \\ 0 \end{bmatrix} h_1^i + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ r \end{bmatrix} h_2^i + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ s \end{bmatrix} h_3^i + \begin{bmatrix} st \\ rt \\ rs \end{bmatrix} h_4^i \quad (8.12)$$

Setzt man (8.11) in (8.10) ein, so erhält man für die Blockmatrix  $\mathbf{K}_{stab}^{ij}$  den Ausdruck in (8.14).

$$\mathbf{K}_{stab}^{ij} = J_c U'' \int_{V_{ref}} \mathbf{B}_{h,i}^T [\vec{\mathbf{e}} \otimes \vec{\mathbf{e}}] \mathbf{B}_{h,j} dV_{ref} \quad (8.13)$$

$$= J_c U'' \mathbf{D} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\nabla_\xi N_h^i) \otimes (\nabla_\xi N_h^j) j_{ref} dr ds dt}_{=: \mathbf{H}_{ij}} \mathbf{D}^T \quad (8.14)$$

Für die  $3 \times 3$  Blockmatrix  $\mathbf{H}_{ij}$  ergibt sich mit (8.12) und nach der Integration ein Ausdruck, der Produkte der Komponenten der Vektoren  $\vec{\mathbf{h}}_1.. \vec{\mathbf{h}}_4$  enthält und somit als die eigentliche Stabilisierungsmatrix für  $\mathbf{K}_{vol}^{Q1P0}$  interpretiert werden kann.

$$\mathbf{H}_{ij} := \frac{8}{3} j_{ref} \times \quad (8.15)$$

$$\begin{bmatrix} h_1^i h_1^j + h_2^i h_2^j + h_4^i h_4^j / 3 & h_2^i h_3^j & h_1^i h_3^j \\ h_2^j h_3^i & h_1^i h_1^j + h_3^i h_3^j + h_4^i h_4^j / 3 & h_1^i h_2^j \\ h_1^j h_3^i & h_1^j h_2^i & h_2^i h_2^j + h_3^i h_3^j + h_4^i h_4^j / 3 \end{bmatrix}$$

Somit zeigt sich, daß die Differenz der Tangentensteifigkeitsmatrizen des konventionellen Verschiebungs- und des Q1P0-Elements eine Hourglass-Stabilisierung darstellt.

**Anmerkung:**

Die Elementkraftvektoren des Q1P0- und des DISP-Elementes sind für den hier betrachteten Spezialfall aufgrund von (8.2) identisch.

$$\vec{\mathbf{F}}_{Q1P0}^{int} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{F}}_{DISP}^{int} = 0 \quad (8.16)$$

Die Gleichheit der Kraftvektoren bedingt selbstverständlich nicht die Gleichheit der Ableitungen nach den Knotenverschiebungen und damit der Tangentensteifigkeitsmatrizen.

## 8.2 Instabilität der SRI-Formulierung

Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 8.1 wird das SRI-Element mit dem DISP-Element verglichen. Die Gegenüberstellung der Terme der Matrizen  $\mathbf{K}_{vol}^{DISP}$  und  $\mathbf{K}_{vol}^{SRI}$  zeigt, daß in  $\mathbf{K}_{vol}^{SRI}$  durch die 1-Punkt Integration ausschließlich die konstanten Anteile der Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{G}$  berücksichtigt werden.

$$\begin{array}{c|c}
 \mathbf{K}_{vol}^{DISP} = & \mathbf{K}_{vol}^{SRI} = \\
 \left. \begin{array}{l} J_c U'' \int_{V_t} \mathbf{B}^T [\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon}] \mathbf{B} dV_t \\ + \\ P_c \int_{V_t} \mathbf{B}^T (\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B} dV_t \\ + \\ P_c \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{G} dV_t \end{array} \right\} & \begin{array}{l} J_c U'' \mathbf{B}_c^T [\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon}] \mathbf{B}_c V_t \\ + \\ P_c \mathbf{B}_c^T (\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B}_c V_t \\ + \\ P_c \mathbf{G}_c^T \mathbf{G}_c V_t \end{array}
 \end{array} \quad (8.17)$$

Die Differenz der volumetrischen Tangentensteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{vol}^{DISP} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{vol}^{SRI}$  kann wie in Abschnitt 8.1 für die Stabilisierung der SRI-Methode herangezogen werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{stab} = & J_c U'' \int_{V_t} \mathbf{B}_h^T [\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon}] \mathbf{B}_h dV_t + \\
 & P_c \int_{V_t} \mathbf{B}_h^T (\vec{\epsilon} \otimes \vec{\epsilon} \Leftrightarrow 2\mathbf{I}) \mathbf{B}_h dV_t + \\
 & P_c \int_{V_t} \mathbf{G}_h^T \mathbf{G}_h dV_t
 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Analog zu der Vorgehensweise in 7.1 können die Integrale in (8.18) analytisch ausgewertet und die Matrix  $\mathbf{K}_{stab}$  daher in geschlossener Form dargestellt werden. Der Aufwand ist aber im Vergleich zu (8.8) erheblich größer.

## 8.3 Eine Stabilisierungsmethode

In den Abschnitten 8.1 und 8.2 wird die Stabilisierungsmatrix unter speziellen Bedingungen analysiert und analytisch, nicht numerisch, berechnet. Diese Vorgehensweise bereitet bei Hexaedern allgemeiner Gestalt und inhomogenen Deformationen der Elemente

Schwierigkeiten. In einer nichtlinearen konsistenten Elementformulierung muß auch der Elementkraftvektor verändert werden. Es stellt sich somit das Problem, zu einer vorgegebenen Stabilisierungsmatrix einen konsistenten Stabilisierungsvektor zu bestimmen.

$$\Delta \vec{\mathbf{F}}_{stab} = \mathbf{K}_{stab} \Delta \vec{\mathbf{u}}_e$$

Unter den speziellen Voraussetzungen an die Elementgeometrie und die Verformung in Abschnitt 8.1/8.2 ist wegen (8.16) der Nullvektor der zu (8.18) bzw. (8.8) konsistente Stabilisierungsvektor.

Eine Alternative zu dem Verfahren in Abschnitt 8.1/8.2 ist die von *Doll* [1998] zunächst auf das SRI-Element angewandte sog. gemischte („mixed“) Integration (8.19).

$$\mathbf{K}_{vol}^{mix} = (1 \Leftrightarrow \vartheta) \mathbf{K}_{vol}^{DISP} + \vartheta \mathbf{K}_{vol}^{SRI} \quad 0 \leq \vartheta \leq 1 \quad (8.19)$$

Die zunächst ad hoc eingeführte Methode ist ein spezielles Verfahren zur Stabilisierung unterintegrierter Steifigkeitsmatrizen. Der Zusammenhang von (8.19) mit der Matrix  $\mathbf{K}_{stab}$  (8.18) kann durch die additive Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{vol}^{DISP} = \mathbf{K}_{vol}^{SRI} + \mathbf{K}_{stab}$  hergestellt werden.

$$\mathbf{K}_{vol}^{mix} = \mathbf{K}_{vol}^{SRI} + (1 \Leftrightarrow \vartheta) \mathbf{K}_{stab} \quad (8.20)$$

Diese Stabilisierung ist an keine Voraussetzungen gebunden und allgemein anwendbar. Die Stabilisierungsmatrix kann mittels der 8-Punkt Integration nach Gauß berechnet werden. (8.20) zeigt, daß zu der 1-Punkt integrierten Matrix  $\mathbf{K}_{vol}^{SRI}$  die mit dem Faktor  $1 \Leftrightarrow \vartheta$  multiplizierte Stabilisierungsmatrix addiert wird. Das Verfahren in (8.20) kann selbstverständlich auch für die Stabilisierung des Q1P0-Elementes und der  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente verwendet werden.

Der Faktor  $\vartheta$  in (8.21) ist notwendig, da die bloße Addition von  $\mathbf{K}_{stab}$  zu  $\mathbf{K}_{SRI}$  bzw.  $\mathbf{K}_{Q1P0}$  die vollständige Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{DISP}$  des Verschiebungselementes ergibt. Der Stabilisierungsparameter  $\vartheta$  muß deshalb so gewählt werden, daß einerseits der Rang der Matrizen  $\mathbf{K}_{SRI}^{stab}$  und  $\mathbf{K}_{Q1P0}^{stab}$  gesichert ist, andererseits die volumetrische Versteifung des Verschiebungselementes zuverlässig unterdrückt wird. Die geeignete Wahl des Parameters  $\vartheta$  ist entscheidend für den praktischen Einsatz des nach (8.20) stabilisierten Elementes. Leider helfen theoretische Untersuchungen hier nicht weiter, da keine genauen Aussagen über den Rang der Matrix  $\mathbf{K}_{vol}^{mix}$  als Funktion des Stabilisierungsparameters  $\vartheta$  möglich sind. Besonders in einer nichttrivialen Simulation wie dem „necking bar“ macht sich außer der Deformation auch der Einfluß des elasto-plastischen Stoffgesetzes auf das Stabilitätsverhalten der Q1P0-,  $\bar{\mathbf{F}}$ - und SRI-Elemente bemerkbar (siehe hierzu *Doll* [1998]). Mangels einer Alternative muß durch numerische Simulationen der kleinste Wert für  $\vartheta$  ermittelt werden, für den kein hour-glassing auftritt. Ein größerer Wert führt unvermeidlich zu einer Versteifung gegenüber dem nichtstabilisierten Element. Diese Problematik wird in

Abschnitt 8.4 anhand der Kompression eines hyperelastischen Klotzes deutlich gemacht.

Aufgrund der vorhergehenden Ausführungen kann die Differenz der Steifigkeitsmatrizen des Verschiebungselementes und des SRI- bzw. Q1P0-Elements als Stabilisierungsmatrix  $\mathbf{K}_{stab}$  verwendet werden. Die Addition von  $\vartheta \mathbf{K}_{stab}$  ( $0 < \vartheta < 1$ ) zu  $\mathbf{K}_{SRI}$  bzw.  $\mathbf{K}_{Q1P0}$  ergibt dann die Steifigkeitsmatrix der stabilisierten Version der versteifungsfreien Formulierung.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{SRI}^{stab} &= \mathbf{K}_{SRI} + \vartheta (\mathbf{K}_{DISP} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{SRI}) \\ \mathbf{K}_{Q1P0}^{stab} &= \mathbf{K}_{Q1P0} + \vartheta (\mathbf{K}_{DISP} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{Q1P0})\end{aligned}\tag{8.21}$$

In einer konsistenten nichtlinearen FE-Formulierung reicht es nicht aus, nur die Steifigkeitsmatrizen zu modifizieren. Wenn die asymptotische quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens erhalten bleiben soll, dann müssen auch die inneren Kraftvektoren von SRI- und Q1P0-Element verändert werden. Die Addition der Stabilisierungsvektoren  $\vartheta (\vec{\mathbf{F}}_{DISP} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{F}}_{SRI})$  (für das SRI-Element) bzw.  $\vartheta (\vec{\mathbf{F}}_{DISP} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{F}}_{Q1P0})$  (für das Q1P0-Element) zu den Elementkraftvektoren der versteifungsfreien Elemente ist deshalb in einer stabilen und konsistenten Elementformulierung notwendig.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{SRI}^{stab} &= \vec{\mathbf{F}}_{SRI} + \vartheta (\vec{\mathbf{F}}_{DISP} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{F}}_{SRI}) \\ \vec{\mathbf{F}}_{Q1P0}^{stab} &= \vec{\mathbf{F}}_{Q1P0} + \vartheta (\vec{\mathbf{F}}_{DISP} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{F}}_{Q1P0})\end{aligned}\tag{8.22}$$

Die Bestimmung von  $\vartheta$  bedarf noch eingehender Untersuchung: die Abhängigkeit vom Materialgesetz der verformten Struktur, von der äußeren Belastung und von dem in der Simulation verwendeten Netz. In einer effizienten Formulierung sollte  $\vartheta$  automatisch berechnet und bei einer inkrementellen, schrittweisen Aufbringung der Belastung auch automatisch verändert werden.

### 8.3.1 Numerische Stabilitätsuntersuchung

Die Aussagen der Abschnitte 8.1 bis 8.3 über numerische Instabilität und Stabilisierung versteifungsfreier Elemente können an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Da keine signifikanten Unterschiede zwischen dem Q1P0- und dem SRI-Element auftreten, werden nur die Resultate für das letztere dokumentiert.

Ein Würfel der Kantenlänge 1mm wird durch vier gleiche Knotenkräfte belastet (s. Abb. 8.1). Damit ein Rangabfall der Tangentensteifigkeitsmatrix und damit negative Eigenwerte des SRI-Elementes beobachtet werden können, muß in diesem Beispiel mit Kraftsteuerung gearbeitet werden. Die Verschiebungssteuerung führt beim SRI-Element im Gegensatz zu EAS-Elementen (s. *Wriggers, Reese* [1996]) zu keiner Instabilität. In der

Simulation wird ein um einen Penalty-Term erweitertes Neo-Hooke Material verwendet (s. *Liu, Hofstatter, Mang* [1994]). Die elastische Energiedichte  $W$

$$W = \mu (\hat{I}_1(\mathbf{C}) \Leftrightarrow 3) + \frac{1}{2} K (J \Leftrightarrow 1)^2, \quad \hat{I}_1(\mathbf{C}) = J^{-2/3} (C_{11} + C_{22} + C_{33})$$

besitzt als Werkstoffparameter die Neo-Hooke Konstante  $\mu$  und den Kompressionsmodul  $K$  für den volumetrischen Anteil der Energiedichte. Um nahezu volumentreue Verformungen zu simulieren, erhalten diese Größen die Werte  $\mu = 10^2 \text{N/mm}^2$  und  $K = 10^5 \text{N/mm}^2$ .

SRI	$\vartheta=0.01$	DISP	KOMPRESSION
30.20	48.39	48.92	3.2%
23.69	44.1	46.03	11.7%
19.68	41.67	44.39	16.5%
15.91	39.54	42.96	20.8%
0.118	32.20	38.14	36.0%
<b>-1.223</b>	<b>31.68</b>	37.82	37.1%
<b>-2.527</b>	<b>31.19</b>	37.51	38.2%
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
<b>-62.99</b>	<b>13.27</b>	30.96	80.0%

Tabelle 8.1: Eigenwertanalyse

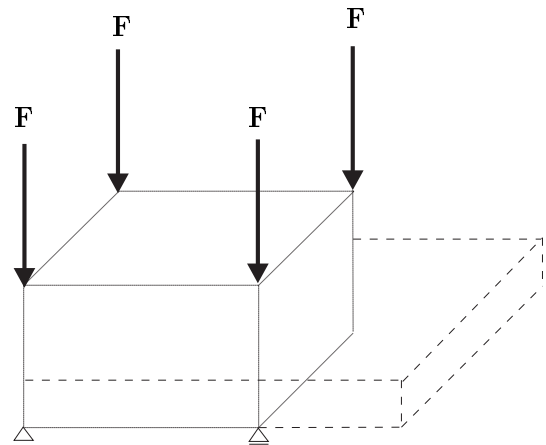


Abb. 8.1: Einzelement mit Kraftsteuerung

Die Tabelle 8.1 zeigt den jeweils kleinsten Eigenwert des Verschiebungselementes DISP, des Selektiv Reduziert Integrierten (SRI) Elementes und des stabilisierten SRI-Elementes für  $\vartheta = 0.01$ . Der Tabelle kann entnommen werden, daß das SRI-Element schon bei einer Kompression um ca. 37% einen negativen Eigenwert besitzt. Das „hour-glassing“ kann mit einem Stabilisierungsfaktor  $\vartheta = 0.01$  zuverlässig, d.h. bis zu einer Kompression von fast 100%, beseitigt werden. Abb. 8.2 zeigt den kleinsten Eigenwert des stabilisierten SRI-Elementes in Abhängigkeit vom Stabilisierungsfaktor  $\vartheta$ . Die Kompression des Würfelementes beträgt 38.2%. Der kleinste Eigenwert beim unstabilisierten SRI-Element ( $\vartheta = 0$ ) beträgt dann nach Tabelle 8.1 -2.527. Anhand der Abb. 8.2 wird deutlich, daß für  $\vartheta < 0.003$  der Eigenwert sehr rasch gegen negative Werte (in Abb. 8.2 nicht angegeben) strebt. Werte von  $\vartheta > 0.003$  garantieren den richtigen Rang der Elementsteifigkeitsmatrix und die Beseitigung von „hour-glass“ Verschiebungen des SRI-Elementes. Der Grenzwert von  $\vartheta = 0.003$  verschiebt sich jedoch bei zunehmender Kompression zu erheblich größeren Werten.



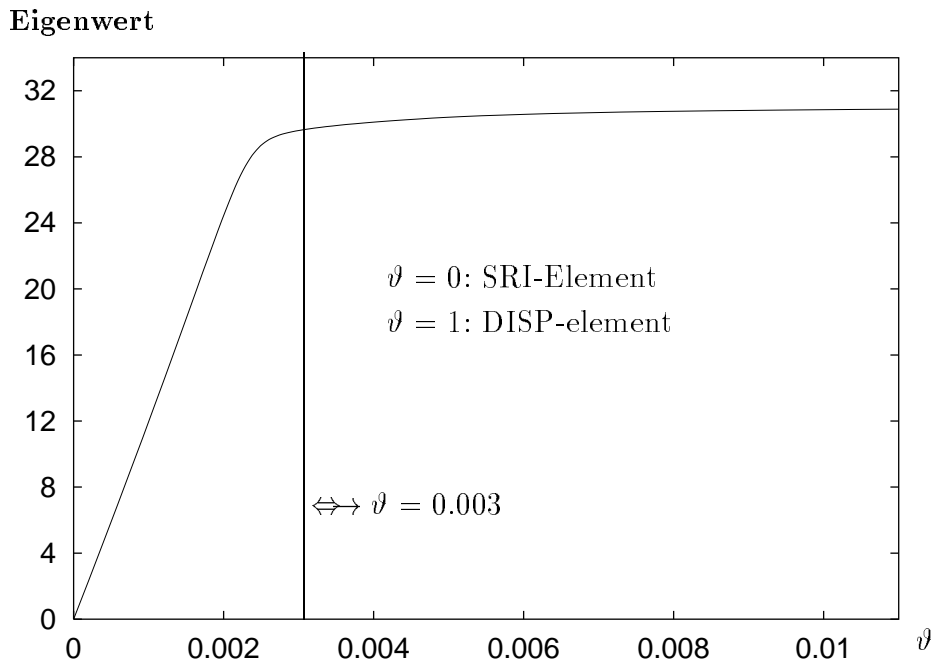


Abb. 8.2: Abhängigkeit des kleinsten Eigenwertes bei einer Kompression von 38.2% vom Stabilisierungsparameter  $\vartheta$  (Eigenwert des SRI-Elements in diesem Zustand -2.53)

## 8.4 Simulation: Kompression eines Würfels

Die folgende Simulation soll den Einsatz des SRI-Elementes und seiner stabilisierten Version für inhomogene nichtlineare Verformungen dokumentieren. Das Beispiel wurde der Literatur entnommen (siehe z.B. *Reese et al.* [1998]), weil bei einer Vernetzung mit 8-Knoten EAS-Elementen massiv „hour-glass“ Verschiebungen auftreten und daher zum Test von Stabilisierungsmethoden für EAS-Elemente verwendet wird. Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, daß das SRI- und das Q1P0-Element in diesem Beispiel keine numerischen Instabilitäten aufweisen, d.h. eine Stabilisierung ist nicht notwendig.

Ein Würfel der Kantenlänge 1mm wird in der Umgebung des Mittelpunktes seiner Oberfläche nach Abb. 8.3 homogen belastet. Aufgrund der Symmetrie wird nur ein Viertel des Würfels mit einem  $8 \times 8 \times 8$  Netz diskretisiert. Der Block kann sich senkrecht zur Belastungsrichtung frei ausdehnen. Als Material wird ebenso wie in Abschnitt 8.3.1 eine Neo-Hooke Energiedichte mit volumetrischer Penalty-Energiedichte verwendet. Die Materialkenngrößen betragen  $\mu = 10 \text{ N/mm}^2$  und  $K = 10^5 \text{ N/mm}^2$ . Die Belastung wird inkrementell mit konstanten Lastschritten aufgebracht.

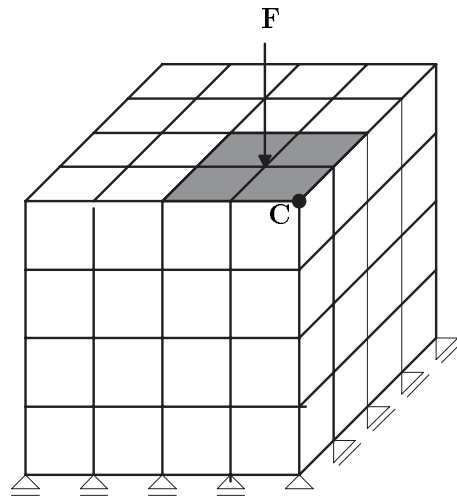


Abb. 8.3: Würfel aus Neo-Hooke Material ( $\mu = 10 \text{ N/mm}^2$ ,  $K = 10^5 \text{ N/mm}^2$ )

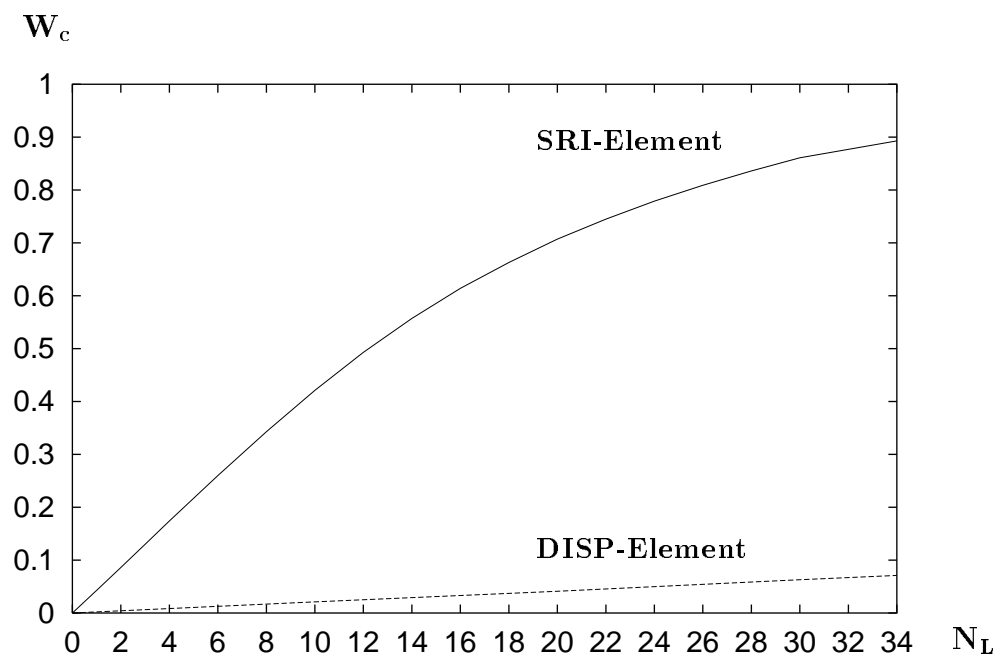


Abb. 8.4: Last-Verschiebungskurven für ein Netz mit  $8 \times 8 \times 8$  Elementen  
 $N_L$ : Anzahl der Lastschritte;  $W_c$ : Verschiebung in mm

In der Abb. 8.4 sind die Last-Verschiebungskurven für das SRI-Element und das DISP-Element dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß das Verschiebungselement DISP mit zunehmender Belastung vollkommen versteift.

Abb. 8.5 zeigt das Netz aus SRI-Elementen nach 34 Lastschritten. Die Kompression bei Punkt C in Abb. 8.3/8.5 beträgt dann ca. 80%, d.h. der Block wird in der Mitte auf ein Fünftel seiner ursprünglichen Länge zusammengepreßt.

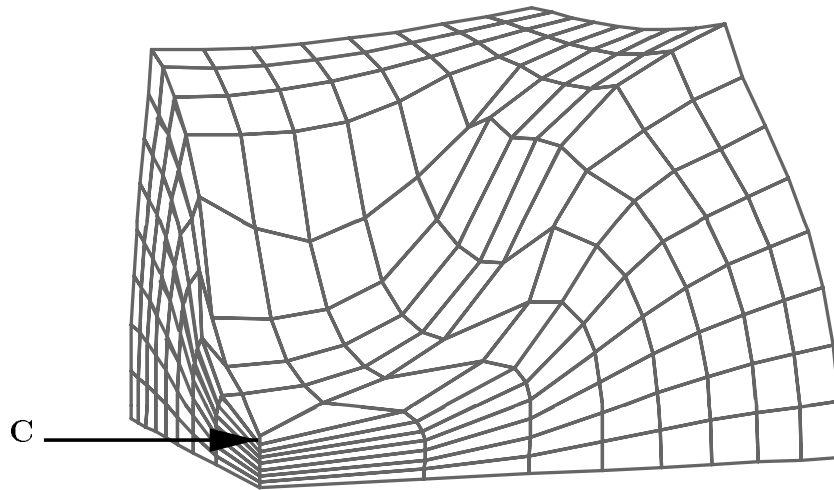


Abb. 8.5: Netz des deformierten Würfels nach 34 Lastschritten

Obwohl in diesem Beispiel bei den SRI-Elementen kein Rangabfall auftritt, kann trotzdem für Elemente, die nach (8.21) und (8.22) konstruiert sind, die zunehmende Versteifung bei wachsendem Stabilisierungsfaktor  $\vartheta$  demonstriert werden. Da es in „realen“ Anwendungsrechnungen schwierig oder gar unmöglich ist, zwischen physikalischen und numerischen Instabilitäten zu unterscheiden, muß bei Verdacht auf Rangdefekte die Stabilisierung nach (8.21) verwendet werden. Über damit verbundene Versteifungseffekte sollte sich der Anwender anhand einfacher Beispiele informieren.

In der Abb. 8.6 sind die Last-Verformungskurven für stabilisierte SRI-Elemente mit verschiedenen Werten von  $\vartheta$  aufgezeichnet.  $\vartheta = 0$  entspricht dem versteifungsfreien SRI-Element und  $\vartheta = 1.0$  dem konventionellen Verschiebungselement. Bei  $\vartheta = 0.01$  ist die Vertikalverschiebung am Punkt C schon um über 0.1 mm kleiner als für das SRI-Element. Dies entspricht einer relativen Abweichung von der SRI-Verschiebung um ca. 13%. Mit wachsendem Wert von  $\vartheta$  nähert sich die Verschiebung  $W_c$  monoton dem Resultat, der mit dem Verschiebungselement erzielt wird.

Das Schaubild 8.6 macht deutlich, daß die Bestimmung des Stabilisierungsparameters und eine evtl. erforderliche Veränderung dieses Faktors automatisch, unabhängig vom FE-Anwender erfolgen sollte. Ein beim Beginn einer nichtlinearen Rechnung zu groß gewählter Faktor garantiert die Stabilität des Elementes, führt aber zu schlechten Resultaten. Eine vom FE-Programm durchgeführte Berechnung von  $\vartheta$  ist derzeit nur in Ansätzen erkennbar und wird in der Zukunft noch viel Forschungsarbeit erfordern.

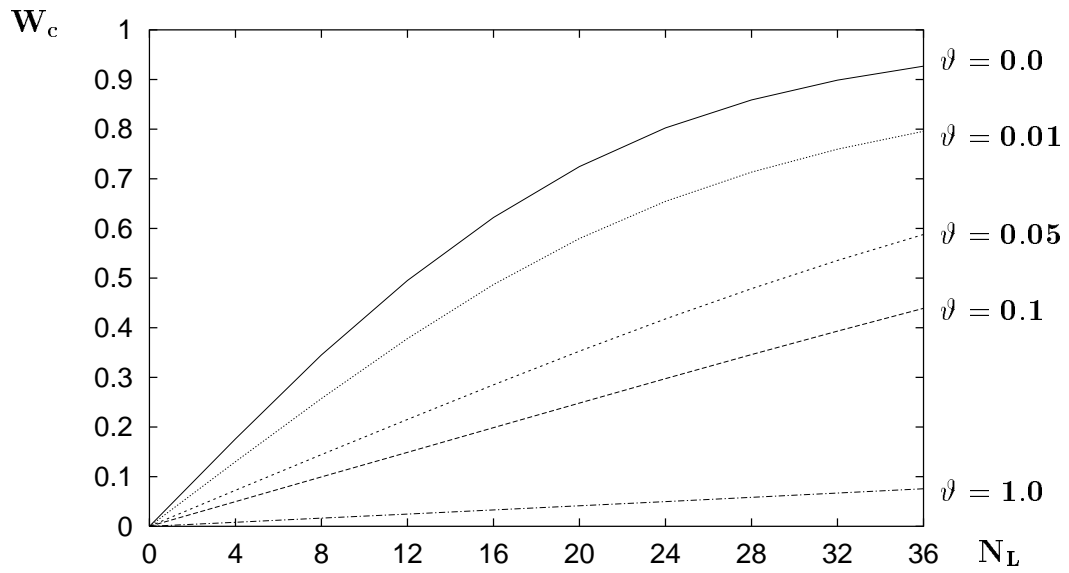


Abb. 8.6:  $\vartheta$ -Sensitivität der Ergebnisse beim stabilisierten SRI-Element  
 $N_L$ : Anzahl der Lastschritte;  $W_c$ : Verschiebung in mm

# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Dissertation wird der Versuch unternommen, eine möglichst umfassende Darstellung der Eigenschaften einiger moderner, versteifungsfreier dreidimensionaler 8-Knoten Volumenelemente zu geben. Für lineare elastische Probleme haben sich die „enhanced assumed strain“ (EAS) Elemente bewährt. Diese Elemente müssen hinsichtlich der Art und Anzahl der inneren Elementfreiheitsgrade optimiert werden, da sonst die EAS-Elemente gegenüber dem konventionellen Verschiebungselement einen deutlich größeren Berechnungsaufwand erfordern. Die systematische Untersuchung von EAS-Quaderelementen bietet eine Möglichkeit eine EAS-Formulierung zu erhalten, die auch für Hexaeder beliebiger Form zugleich versteifungsfreie Verformungen und eine effiziente Programmierung garantiert.

Der Einsatz von EAS-Elementen für nichtlineare dreidimensionale Probleme mit großen Deformationen ist nicht zu empfehlen. Die Gründe liegen nicht nur in dem gegenüber anderen nichtlinearen Elementformulierungen erhöhten Speicherbedarf für die inneren Elementfreiheitsgrade. Es besteht auch keine Möglichkeit die Effizienz der EAS-Elemente analog dem linearen Fall zu steigern. Der Haupteinwand aber gegen einen Einsatz der EAS-Formulierung liegt in der starken Anfälligkeit für das Auftreten von numerischen Instabilitäten.

Das Haupthindernis für eine Verwendung des nichtlinearen, klassischen 8-Knoten Verschiebungselementes sind die ausschließlich volumentreuen Verformungen vieler elastoplastischer und gummiartiger, hyperelastischer Werkstoffe. Die volumetrische Versteifung kann aber von vielen Elementformulierungen zuverlässig und ohne die spezifischen Nachteile der EAS-Elemente unterdrückt werden. Deshalb liegt der Schwerpunkt der Dissertation auf der Untersuchung der sog.  $\bar{\mathbf{F}}$ -Methoden. Die  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente zeichnen sich dadurch aus, daß keine inneren Variablen explizit verwendet werden und damit auch keine statische Kondensation von Elementparametern durchgeführt werden muß. Spezialfälle dieser allgemeinen Methode sind das Q1P0- und das SRI-Element. Neben der im Vergleich zur EAS-Methode größeren Effizienz sind  $\bar{\mathbf{F}}$ -Elemente robuster, d.h. ein numerisch bedingter Rangabfall der Tangentensteifigkeitsmatrix ist in viel geringerem Ausmaß feststellbar. Um die Instabilität zu unterdrücken, wird eine Methode beschrieben und getestet, die

die gewichtete Differenz der Steifigkeitsmatrizen vom Verschiebungselement und dem jeweiligen versteifungsfreien Element als Stabilisierungsmatrix benutzt. Ein Schwerpunkt zukünftiger Arbeit wird die automatische Berechnung des Stabilisierungsparameters sein. Diesem kommt eine entscheidende Bedeutung zu, da ein zu großer Wert zwar die Stabilität von SRI- oder Q1P0-Element garantiert, aber die Versteifung nicht mehr zuverlässig unterdrückt. Bei der Suche nach dem optimalen Wert können theoretische Eigenwertuntersuchungen weiterhelfen, die vom Autor mit dem Programm MAPLE vorgenommen wurden. Dabei werden die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix eines stabilisierten Elementes für die homogene Kompression als Funktion der Deformation und des Stabilisierungsfaktors ermittelt. Die Resultate werden zu gegebener Zeit veröffentlicht werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] Andelfinger, U., Ramm, E., [1993], EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 1311-1337 .
- [2] Belytschko, T., Ong, J., Liu, W.K., Kennedy, J.M., [1984], Hourglass control in linear and nonlinear problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 43, 251-276 .
- [3] Belytschko, T., Wang, X., [1987], An efficient flexurally superconvergent hexahedral element, Engineering Computations, Vol. 4, 281-288 .
- [4] Belytschko, T., Bindeman, L.P., [1991], Assumed strain stabilization of the four-node quadrilateral with one-point quadrature for nonlinear problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 88, 311-340.
- [5] Belytschko, T., Bindeman, L.P., [1993], Assumed strain stabilization of the eight-node hexahedral element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 105, 225-260 .
- [6] Betten, J., [1993], Kontinuumsmechanik, Springer .
- [7] Bischoff, M., Ramm, E., Braess, D., A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements, Computational Mechanics, Vol. 22, 443-449 .
- [8] Bonet, J., Bhargava, P., [1995], A uniform deformation gradient hexahedron element with artificial hourglass control, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, 2809-2828 .
- [9] Borst, R. de, Groen, A., [1995], Some observations on element performance in isochoric and dilatant plastic flow, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, 2887-2906 .
- [10] Crisfield, M.A., [1991/96], Nonlinear finite element analysis of solids and structures, Vol. I/II, Wiley .

- [11] Crisfield, M.A., [1997], Vortrag und persönliche Mitteilung an den Autor auf dem EUROMECH COLLOQUIUM 371 in Bad Herrenalb, September 1997 .
- [12] Doll, S., [1998], Zur Behandlung großer elastoviskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten, Dissertation, Universität (TH) Karlsruhe .
- [13] Flanagan, D.P., Belytschko, T., [1981], A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 679-706 .
- [14] Freischläger, C., Schweizerhof, K., [1996], On a systematic development of trilinear 3D volume elements based on Simo's enhanced strain formulation, International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, 2993-3017.
- [15] Glaser, S., Armero, F., [1997], On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations, Engineering Computations, Vol. 14, 759-791 .
- [16] Hughes, J.R., Malkus, D.S., [1978], Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 15, 63-81 .
- [17] Kaliske, M., Rothert, H., [1997], On the finite element implementation of rubber-like materials at finite strains, Engineering Computations, Vol. 14, 216-232 .
- [18] Korelc, J., Wriggers, P., [1996], Consistent gradient formulation for a stable enhanced strain method for large deformations, Engineering Computations, Vol. 13, 103-123 .
- [19] Liu, W.K., Belytschko, T., Chen, J.S., [1988], Nonlinear versions of flexurally superconvergent elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, 241-258 .
- [20] Liu, W.K., Hu, Y.K., Belytschko, T., [1994], Multiple quadrature underintegrated finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 3263-3289 .
- [21] Liu, C.H., Hofstetter, G., Mang, H.A., [1994], 3D finite element analysis of rubber-like materials at finite strains, Engineering Computations, Vol. 11, 111-128 .
- [22] Moita, G.F., Crisfield, M.A., [1996], A finite element formulation for 3D continua using the corotational technique, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, 3775-3792 .
- [23] Moran, B., Ortiz, M., Shih, C.F., [1990], Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, 483-514.



- [24] Nagtegaal, J.C., Parks, D.M., Rice, J.R., [1974], On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 4, 153–177 .
- [25] Nagtegaal, J.C., Fox, D., [1996], Using assumed enhanced strain elements for large compressive deformation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 20-22, 3151-3159 .
- [26] Pian, T.H., Sumihara, K., [1984], Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1685-1695 .
- [27] Schweizerhof, K., [1982], Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit Finiten Elementen, Dissertation, Universität (TH) Stuttgart .
- [28] Di, S., Ramm, E., [1994], On alternative hybrid stress 2D and 3D elements, *Engineering Computations*, Vol. 11, 49-68 .
- [29] Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K.S., [1985], Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 51, 177–208 .
- [30] Simo, J.C., Rifai, M.S., [1990], A Class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, 1595–1638 .
- [31] Simo, J.C., Taylor, R.L., [1991], Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 85, 273–310 .
- [32] Simo, J.C., Armero, F., [1992], Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, 1413–1449 .
- [33] Simo, J.C., [1992], Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 99, 61-112 .
- [34] Simo, J.C., Armero, F., Taylor, R.L., [1993], Improved versions of assumed enhanced strain trilinear elements for 3D finite deformation problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 110, 359–386 .
- [35] Simo, J.C., Hughes, J.R., [1998], *Computational Inelasticity*, Springer .

- [36] de Souza Neto, E.A., Peric, D., Huang, G.C., Owen, D.R.J., [1995], Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity, *Communications of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 951-961 .
- [37] de Souza Neto, E.A., Peric, D., Dutko, M., Owen, D.R.J., [1996], Design of simple low order elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, 3277–3296 .
- [38] Sze, K.Y., [1992], Efficient formulation of robust hybrid elements using orthogonal stress-strain interpolants and admissible matrix formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1-20 .
- [39] Sze, K.Y., Ghali, A., [1992], A two-field solid element suiting thin-mesh analysis by admissible matrix formulation, *Engineering Computations*, Vol. 9, 649-668 .
- [40] Taylor, R.L., Beresford, P.J., Wilson, E.L., [1976], A non-conforming element for stress analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 1211–1219 .
- [41] Wriggers, P., Reese, S., [1996], A note on enhanced strain methods for large deformations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 135, 201-209.
- [42] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., [1989], *The finite element method*, Vol. I, McGraw-Hill .

# Liste der Bezeichnungen

Vektoren, Tensoren und Matrizen werden in der vorliegenden Arbeit mit Fettschrift dargestellt. Ein Pfeil über einer Größe kennzeichnet Vektoren bzw. Spaltenmatrizen. Alle verwendeten Bezeichnungen und Abkürzungen werden im Text erläutert. Einige häufig verwendete Schreibweisen sind in der folgenden Liste zusammengestellt.

$n_{elm}$	Anzahl der Elemente in einer FE-Diskretisierung
$J$	Determinante des $\mathbf{F}$ -Tensors
SP	Spur eines Tensors bzw. einer Matrix
det bzw. Det	Determinante eines Tensors bzw. einer Matrix
$I_1, I_2, I_3$	Invarianten eines Tensors bzw. einer Matrix
grad	Gradientenoperator bzgl. der Momentankonfiguration
GRAD	Gradientenoperator bzgl. der Referenzfiguration